Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Physique

VIBRATIONS ET ONDES

Manuel de Cours

Pr. DJELOUAH Hakim

Année Universitaire 2006-2007

Deuxième Année des Filières Scientifiques des Universités et des Ecoles d'Ingénieurs

Table des matières

1 Introduction aux équations de Lagrange **5**
1.1 Equations de Lagrange pour une particule 5
1.1.1 Equations de Lagrange 5
1.1.2 Cas des systèmes conservatifs 7
1.1.3 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse 8
1.1.4 Cas d'une force extérieure dépendant du temps 9
1.2 Système à plusieurs degrés de liberté 10

2 Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté **11**
2.1 Oscillations non amorties 11
2.1.1 Oscillateur linéaire 11
2.1.2 Energie Cinétique 11
2.1.3 Energie potentielle 12
2.1.4 Equation différentielle 12
2.1.5 Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple . 13
2.2 Oscillations libres des systèmes amortis à un degré de liberté 13
2.2.1 Equation de Lagrange pour les systèmes dissipatifs 14
2.2.2 Cas particulier des oscillations de faible amplitude 14
2.2.3 Résolution de l'équation différentielle 15
2.2.4 Exemples 17

3 Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté **20**
3.1 Equation différentielle 20
3.2 Système masse-ressort-amortisseur 21
3.3 Solution de l'équation différentielle 22
3.3.1 Cas particulier où $\mathrm{A(t)} = \mathrm{A_0} \cos(\Omega \mathrm{t})$ 22
3.3.2 Cas d'une excitation périodique 26
3.4 Impédance mécanique 26
3.4.1 Définition 26
3.4.2 Impédances mécaniques 27
3.4.3 Puissance 27
3.4.4 Applications 28

4 Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté 30
4.1 Introduction 30
4.2 Systèmes à deux degrés de liberté 31
4.2.1 Système masses-ressorts en translation 31
4.2.2 Cas particulier de deux oscillateurs identiques 34
4.2.3 Pendules couplés 38

5 Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté 40
5.1 Equations de Lagrange 40
5.2 Système masses-ressorts-amortisseurs 40
5.2.1 Equations différentielles 41
5.2.2 Etude du régime permanent sinusoïdal 41
5.3 Impédance 43
5.4 Application 43

6 Généralités sur les phénomènes de propagation 45
6.1 Propagation à une dimension 45
6.1.1 Equation de propagation 45
6.1.2 Solution de l'équation de propagation 45
6.1.3 Onde progressive sinusoïdale 48
6.1.4 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales 49
6.1.5 Vitesse de phase 51
6.1.6 Vitesse de groupe 52
6.1.7 Onde Vectorielle 54
6.2 Propagation en trois dimensions 54
6.2.1 Equation de propagation 54
6.2.2 Onde plane progressive sinusoïdale 54

7 Cordes vibrantes 57
7.1 Equation des ondes 57
7.2 Ondes progressives harmoniques 59
7.2.1 Définition 59

7.2.2 Force en un point 59
7.2.3 Impédance 59
7.3 Oscillations libres d'une corde de longueur finie 60
7.4 Réflexion et transmission 62
7.4.1 Réflexion et transmission entre deux cordes semi-infinies 62
7.4.2 Réflexion sur une impédance quelconque 62

8 Ondes acoustiques dans les fluides 64
8.1 Introduction 64

8.2 Equation d'onde 64

8.3 Vitesse du son 67
8.4 Onde progressive sinusoïdale 68
  8.4.1 Définition 68
  8.4.2 Impédance acoustique 69
  8.4.3 Energie acoustique 69
8.5 Reflexion-Transmission 73

9 Propagation d'une onde électrique dans une ligne coaxiale 76
9.1 Introduction 76
9.2 Equation de propagation 76
9.3 Solution de l'équation de propagation 77
9.4 Onde Progressive sinusoïdale 78
  9.4.1 Définition 78
  9.4.2 Impédance en un point 78

10 Eléments d'analyse vectorielle 79
10.1 Champ scalaire - Champ vectoriel 79
10.2 Gradient d'un champ scalaire 79
10.3 Divergence d'un champ vectoriel 79
10.4 Rotationnel d'un champ vectoriel 80
10.5 Laplacien scalaire 80
10.6 Laplacien vectoriel 80
10.7 Opérateur nabla 80
10.8 Théorème de Stokes-Théorème de Gauss 81
  10.8.1 Circulation d'un champ vectoriel 81
  10.8.2 Flux d'un champ vectoriel 82
  10.8.3 Théorème de Stockes 82
  10.8.4 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence) 82

11 Les équations de Maxwell dans le vide 83
11.1 Le champ électromagnétique 83
  11.1.1 Champ électromoteur et vecteur densité de courant 83
  11.1.2 Le champ magnétique 84
11.2 Le régime variable 85
  11.2.1 Le phénomène de propagation 85
  11.2.2 Le phénomène d'induction 85
  11.2.3 Le phénomène de capacité 85
11.3 L'induction électromagnétique 86
  11.3.1 Loi de Faraday-Lenz 86
  11.3.2 Equation de Maxwell-Faraday 86
11.4 Le théorème d'Ampère 87
  11.4.1 Equation de continuité 87
  11.4.2 Le théorème d'Ampère 89

11.5 En résumé 89

12 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide 90
12.1 Equations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ 90
12.2 L'onde plane progressive sinusoïdale 92
12.2.1 Relation de dispersion 92
12.2.2 Structure de l'onde uniforme plane 92
12.3 Onde plane uniforme progressive et sinusoïdale 93
12.3.1 Onde de polarisation rectiligne 93
12.3.2 Onde de polarisation quelconque 94
12.3.3 Notation complexe 95
12.4 Energie électromagnétique : vecteur de Poynting 96
12.4.1 Onde de forme spatiale et temporelle quelconques 96
12.4.2 Onde plane progressive et uniforme sinusoïdale 98

13 Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques 99
13.1 Equations de Maxwell dans les milieux parfaits 99
13.2 Propagation dans les milieux diélectriques 100
13.3 Relations de passage 101
13.4 Lois de Snell-Descartes 102
13.5 Formules de Fresnel 104
13.5.1 Champ électrique dans le plan d'incidence 104
13.5.2 Champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence : 106
13.5.3 Discussion des résultats 107
13.6 Réflexion sur un conducteur parfait 109

A Equations différentielles 112
A.1 Introduction 112
A.2 Equation homogène 112
A.2.1 Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$) 113
A.2.2 Régime critique ($\delta = \omega_O$) 114
A.2.3 Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$) 115
A.3 Equation avec second membre 118
A.3.1 Solution générale 118
A.3.2 Cas particulier où A(t) est constante 119
A.3.3 Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$: 120
A.3.4 Cas où A(t) est une fonction périodique du temps 121

Chapitre 1

Introduction aux équations de Lagrange

1.1 Equations de Lagrange pour une particule

1.1.1 Equations de Lagrange

Considérons le cas particulier d'une particule astreinte à se déplacer, sans frottement, sur une courbe plane contenue dans le plan xOy. La courbe sur laquelle est astreinte se déplacer la particule de masse m, est le lieu des points dont les coordonnées vérifient les relation :

$$\begin{cases} z = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

La première relation correspond au plan xOy . La seconde relation représente l'équation de la trajectoire dans ce plan. Ces deux relations définissent les équations des liaisons appelées souvent liaisons. Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de coordonnées qui représentent la position de m (trois dans le cas général) moins le nombre de liaisons (deux dans le cas présent). La particule possède donc un degré de liberté. Il faut choisir une variable q pour repérer sa position. Cette variable est appelée coordonnée généralisée. Il est possible d'exprimer le vecteur position $\vec{r}$ de la particule en fonction de la coordonnée généralisée q pr la relation : $\vec{r} = \vec{r}\,(q)$.

Soit $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces agissant sur la particule. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

où $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ est la vitesse de la particule.

Soit δW le travail fourni par la force $\vec{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal $\delta\vec{r}$:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

Le déplacement $\delta\vec{r}$ peut s'écrire en fonction de la variation δq de la coordonnée généralisée q :

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q$$

Dans ce cas le travail δW peut se mettre la forme :

$$\delta W = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q$$

On appelle force généralisée conjuguée de q, ou q-composante de la force, la quantité F_q définie par :

$$F_q = \frac{\delta W}{\delta q} = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}$$

Par conséquent δW s'écrit :

$$\delta W = F_q\,\delta q$$

En tenant compte de la relation fondamentale de la dynamique, cette expression peut également s'écrire :

$$\delta W = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right] = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} + \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right]$$

Sachant que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q}$$

on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right] - \vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$, peut aussi s'écrire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\dot{q}$$

D'où la relation :

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}}$$

et

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}}\right] - \vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}$$

Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right]=\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right]=\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}$$

et que

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right]=\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right]=\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right]$$

L'expression du travail δW peut alors s'écrire :

$$\delta W=m\ \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right\}\ \delta q$$

Si on note $T=\frac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique de la masse m , on obtient finalement :

$$\delta W=\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}\right\}\delta q$$

On obtient finalement les deux expressions équivalentes du travail δW

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}\right\}\delta q=F_q\,\delta q$$

On en déduit l'équation de Lagrange pour un système à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=F_q$$

1.1.2 Cas des systèmes conservatifs

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel U et elle s'écrit :

$$F_q=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

L'équation de Lagrange devient alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

Généralement l'énergie potentielle U ne dépend pas de la vitesse, c'est–dire que $\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}}=0$. L'équation de Lagrange peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial q}=0$$

On introduit la fonction de Lagrange (ou lagrangien du système) qui est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{L} = T - U$$

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un système conservatif :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

1.1.3 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

Equation de Lagrange

Considérons une situation physique dans laquelle la particule est soumise à des forces de frottement de viscosité dont la résultante $\vec{f}$ est de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$$

Pour calculer la force généralisée f_q correspondante, nous utilisons la définition du paragraphe précédent :

$$f_q = \vec{f}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = -\alpha\,\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]^2\,\frac{\partial q}{\partial t}$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme :

$$f_q = -\beta\,\dot{q}$$

avec

$$\beta = \alpha\,\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]^2$$

Si en plus des forces qui dérivent d'un potentiel il existe des forces de frottement de viscosité, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial T}{\partial q} = F_{U,q} + f_q$$

où $F_{U,q} = -\dfrac{\partial U}{\partial q}$ représente les forces qui dérivent d'un potentiel. D'où :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\beta\,\dot{q}$$

Fonction dissipation

Calculons le travail δW_f fourni par la force de frottement pendant un intervalle de temps δt pour un déplacement $\delta\vec{r}$:

$$\delta W_f = \vec{f}\cdot\delta\vec{r} = -\alpha\, v^2\, \delta t$$

La quantité de chaleur δQ gagnée par le système en interaction avec la particule, est telle que :

$$\delta Q = \alpha\, v^2\, \delta t$$

Soit $P_d = \dfrac{\delta Q}{\delta t}$ la puissance dissipée par les forces de frottement sous forme de chaleur :

$$P_d = \alpha\, v^2$$

Cette puissance dissipée peut être exprimée en fonction de $\dot{q}$, par :

$$P_d = \alpha\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]^2 = \alpha\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}\right]^2 = \beta\,\dot{q}^2$$

Par définition, la fonction dissipation est égale à la demi-puissance dissipée :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}P_d = \frac{1}{2}\beta\,\dot{q}^2$$

La q-composante f_q de la force de frottement peut alors s'écrire :

$$f_q = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q}}$$

L'équation de Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q}} = 0$$

1.1.4 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Considérons le cas plus général d'un force extérieure dépendant du temps agissant sur un système qui est le siège de forces de frottement qui dérivent d'une fonction dissipation $\mathcal{D}$. Soit F_{eq} la q-composante de la force extérieure. Dans ce cas l'équation de Lagrange peut s'écrire sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = F_{eq} - \beta\,\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q}} = F_{e,q}$$

1.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Dans le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté. Ainsi, si le système possède N degrés de liberté, il est nécessaire d'avoir N coordonnées généralisées q_i $(i = 1, 2, ..., N)$; nous aurons ainsi N équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = F_{e,q_i} \quad (i = 1, 2, ..., N)$$

La q_i-composante de la force généralisée extérieure est définie par :

$$F_{e,q_i} = \left.\frac{\delta W}{\delta q_i}\right|_{\delta q_i \neq 0}$$

Dans cette expression δW représente le travail des forces extérieures résultant d'une variation δq_i de la coordonnée q_i telle que les coordonnées $q_{j\neq i}$ soient constantes $(\delta q_{j\neq i} = 0)$.

Chapitre 2

Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

2.1 Oscillations non amorties

2.1.1 Oscillateur linéaire

Un système oscillant à un degré de liberté est habituellement repéré à l'aide d'une coordonnée généralisée q qui est l'écart par rapport à la position d'équilibre stable. Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Cette équation est appelée équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple.

2.1.2 Energie Cinétique

Dans le cas d'un système à un degré de liberté, constitué d'une masse m dont la position est répérée par la coordonnée généralisée q, l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right]^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}\right]^2 = \frac{1}{2}\, m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]^2 \dot{q}^2$$

L'énergie cinétique d'un système à un degré de liberté est fonction de q et $\dot{q}$. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} a(q)\, \dot{q}^2$$

où $a(q)$ est une fonction de la coordonnée généralisée q, définie dans le cas étudié par :

$$a(q) = m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]^2$$

En faisant un développement limité de $a(q)$ au second ordre en q, au voisinage de $q = 0$, on obtient :

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\left[a(0) + \left.\frac{\partial a}{\partial q}\right|_{q=0} q + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\right|_{q=0} q^2 + \cdots\right]\dot{q}^2$$

En limitant l'approximation au second ordre, on obtient :

$$T = \frac{1}{2}a_0\,\dot{q}^2$$

où a_0 est une constante égale à $a\left(0\right)$.

2.1.3 Energie potentielle

Les oscillations se font autour de la position d'équilibre stable $q = 0$ caractérisée par $\frac{\partial U}{\partial q}(q = 0) = 0$. Il est toujours possible , lorsque les écarts par rapport à la position d'équilibre sont faibles, de faire un développement en série de Taylor de $U(q)$ au voisinage de la position d'équilibre $q = 0$. En négligeant les puissances de q d'ordre supérieur à deux, on obtient :

$$U(q) = U(0) + \left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=0} q + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=0} q^2 + \cdots$$

$q = 0$ correspond à un minimum de $U(q)$ pour lequel

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=0} = 0 \quad et \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=0} > 0$$

Si on choisit l'origine de l'énergie potentielle à cette position d'équilibre $(U(0) = 0)$, l'énergie potentielle $U\left(q\right)$ peut s'écrire sous une forme quadratique :

$$U(q) \simeq \frac{1}{2}b_0\,q^2$$

avec : $b_0 = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=0}$

2.1.4 Equation différentielle

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Ce qui permet dobtenir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple où :

$$\omega_0^2 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=0}}{a_0}$$

Les oscillations d'un système vibratoire s'effectuent autour d'une position d'équilibre stable. Pour des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, tous les mouvements vibratoires peuvent être assimilés à des vibrations linéaires et l'énergie potentielle peut alors être approximée par une forme quadratique de la coordonnée q, tandis que l'énergie cinétique peut être approximée par une forme quadratique en $\dot{q}$.

2.1.5 Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple s'écrit :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \, q = 0$$

La solution d'une telle équation est une fonction sinusoïdale du temps

$$q(t) = A \, \cos\left(\omega_0 \, t + \varphi\right)$$

où A représente l'amplitude des oscillations, φ est la phase initiale.

Il est important de remarquer que la pulsation propre ω_0 ne dépend que des éléments qui constituent le système physique étudié (masse, ressort, etc...) tandis que l'amplitude A et la phase initiale φ sont calculées à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

Enfin l'amplitude des oscillations d'un oscillateur harmonique libre ne dépend pas du temps. De telles oscillations sont dites non amorties.

Il faut néanmoins remarquer qu'au delà d'une certaine amplitude la vibration devient non linéaire. Il s'ensuit d'abord une modification de la période des oscillations et ensuite un changement de la nature du mouvement.

2.2 Oscillations libres des systèmes amortis à un degré de liberté

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons pas tenu compte de certaines réalités physiques. En effet, nous n'avons pas pris en compte les forces de frottement qui sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique du système sous forme de chaleur. Dans ce paragraphe, nous allons tenir compte de ces réalités en nous limitant toutefois au cas simple où les pertes sont dues à des frottements visqueux pour lesquels les forces de frottement, qui s'opposent au mouvement, sont proportionnelles à la vitesse .

2.2.1 Equation de Lagrange pour les systèmes dissipatifs

Rappelons l'équation de Lagrange associée à un système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps se ramène à l'étude de la coordonnée généralisée q

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}=F_q$$

Fq représente la composante suivant q de la résultante des forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel.

Nous nous intéressons au cas particulier des forces de frottement définies par la force généralisée

$$F_q=f_q=-\beta\,\dot{q}$$

où β est une constante réelle positive.

L'équation de Lagrange s'écrit alors dans ce cas :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}=-\beta\,\dot{q}$$

2.2.2 Cas particulier des oscillations de faible amplitude

Nous avons montré dans le chapitre précédent que dans ce cas, la fonction de Lagrange s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}a\,\dot{q}^2-\frac{1}{2}b\,q^2$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$a\,\ddot{q}+bq=-\beta\dot{q}$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{q}+2\,\delta\,\dot{q}+\omega_0^2\,q=0$$

où δ est un coefficient positif, appelé facteur (ou coefficient) d'amortissement et défini par :

$$\delta=\frac{\beta}{2\,a_0}$$

ω_0 est la pulsation propre définie par

$$\omega_0=\sqrt{\frac{b_0}{a_0}}$$

2.2.3 Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle dépend de la valeur de δ par rapport à ω_0 :

– Si $\delta > \omega_0$, on dit que le système est suramorti ou apériodique.

– Si $\delta = \omega_0$, on dit que l'on a un amortissement critique.

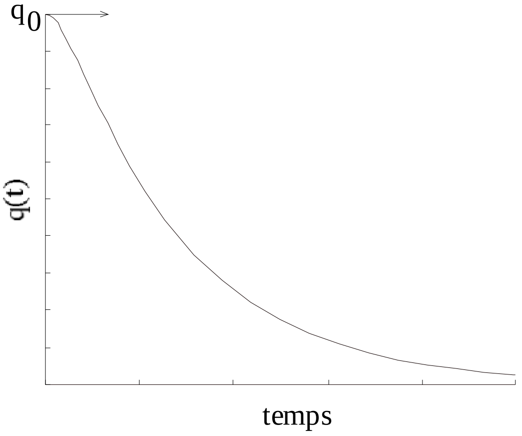
– Si $\delta < \omega_0$, on dit que le système est sous-amorti ou pseudopériodique.

Cas où le système est suramorti ($\delta > \omega_0$)

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :

$$q(t) = A_1\, e^{\left[-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right]t} + A_2\, e^{\left[-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right]t}$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure ci-dessous représente q en fonction du temps dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$. $q(t)$ est une fonction qui tend exponentiellement (sans oscillation) vers zéro.



Régime fortement amorti : variation de q en fonction du temps

Cas de l'amortissement critique ($\delta = \omega_0$)

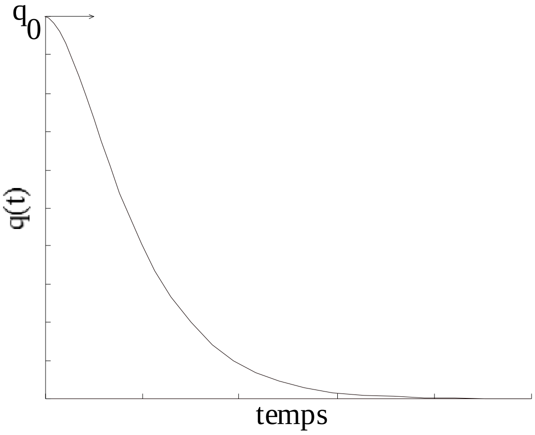
La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2\, t)\; e^{-\delta\, t}$$

Dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$,

$$q(t) = q_0\,(1 + \delta\, t)\; e^{-\delta\, t}$$

$q(t)$ est encore une fonction qui tend vers zéro sans oscillation lorsque le temps augmente.



Amortissement critique : variation de q en fonction du temps

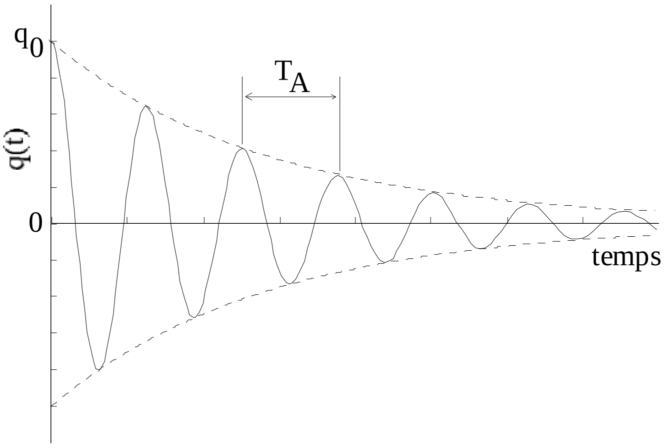
Cas où le système est sous-amorti $(\delta < \omega_0)$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = A\ e^{-\delta t} \cos\left(\omega_A\, t + \phi\right)$$

avec $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; A et ϕ sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. Dans le cas particulier où $q(0) = q_0 \quad$ et $\quad \dot{q}(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_0}{\omega_A} q_0 \\ \phi &= -\arctan\left(\frac{\delta}{\omega_A}\right) \end{aligned}$$



Système faiblement amorti : variation de q en fonction du temps

La figure représente les variations de $q(t)$ au cours du temps. On remarque que $q(t)$ est enveloppée par les deux fonctions exponentielles : $\pm\frac{\omega_0}{\omega_A}\, q_0\, e^{-\delta\, t}$.

Le lieu des maxima est obtenu en résolvant $\dot{q}(t) = 0$. Ce qui donne :

$$\tan(\omega_A t + \phi) = -\frac{\delta}{\omega_A} = \tan(\phi)$$

d'où l'on tire l'instant t_n correspondant au n-ième maximum :

$$t_n = n\frac{2\pi}{\omega_A}$$

Les maxima de $q(t)$ sont séparés par des intervalles réguliers égaux à

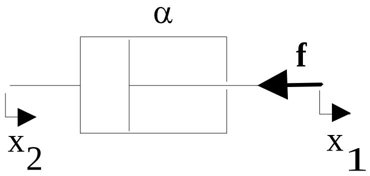
$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}$$

T_A est appelée la pseudo-période. On remarque que , en plus de la diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps, l'un des effets de l'amortissement est l'augmentation de la période des oscillations. Pour des systèmes faiblement amortis ($\delta << \omega_0$), on peut remarquer que $\omega_A \simeq \omega_0$ et que la pseudo période est peu différente de la période propre : $T_A \simeq T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

2.2.4 Exemples

Système mécanique en translation

Amortisseur mécanique Un amortisseur mécanique est constitué d'un élément mobile à l'intérieur d'un récipient contenant un fluide visqueux.



Amortisseur

La force de frottement $\vec{f}$ agissant sur la partie mobile repérée par x_1, est donnée par

$$f_x = -\alpha\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

où $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ représente la vitesse relative des deux éléments qui constituent l'amortisseur.

Equation différentielle du mouvement Considérons le cas d'une masse m oscillant verticalement et reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Repérons par x l'écart de la masse m par rapport à la position d'équilibre.L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}=-\alpha\,\dot{x}$$

Sachant que $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ et que $U=\frac{1}{2}kx^2$, la fonction de Lagrange se met sous la forme

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2-\frac{1}{2}k\,x^2$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement

$$m\,\ddot{x}+\alpha\,\dot{x}+k\,x=0$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$\ddot{x}+2\,\delta\,\dot{x}+\omega_0^2\,x=0$$

où ω_0 et δ sont des constantes positives appelées respectivement la pulsation propre et le facteur d'amortissement ; elles sont données par les relations suivantes

$$\delta=\frac{\alpha}{2\,m}\quad et\quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Système mécanique en rotation

Considérons un pendule simple constitué par une masse ponctuelle m reliée à un axe de rotation fixe par une tige de masse négligeable, qui effectue des oscillations de faible amplitude dans un plan vertical. Ce dispositif est un système à un degré de liberté dont on repère la position par l'angle θ par rapport à la verticale. Le système est immergé dans un fluide dont les forces de viscosité se ramènent à une force s'exerçant sur la masse m et donnée par la relation

$$\vec{f}=-\alpha\,\vec{v}$$

L'équation de Lagrange qui régit le mouvement d'un tel dispositif s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}=-\alpha\,l^2\,\dot{\theta}$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$m\,l^2\,\ddot{\theta}+\alpha\,l^2\,\dot{\theta}+m\,g\,l\,\theta=0$$

$$\ddot{\theta} + 2\,\delta\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$$

où la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement δ sont respectivement donnés par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\alpha}{2\,m}$$

Chapitre 3

Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

3.1 Equation différentielle

Rappelons la forme générale de l'équation de Lagrange pour les systèmes à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = F_{qext}$$

où F_{qext} est la force généralisée associée à $\vec{F}_{ext}$ et où la fonction dissipation est $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$.

Pour les oscillations de faible amplitude, la fonction de Lagrange pouvait se mettre sous une forme quadratique de q et $\dot{q}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a_0\,\dot{q}^2 - \frac{1}{2}b_0\,q^2$$

D'où l'équation différentielle du mouvement

$$a_0\,\ddot{q} + \beta\,\dot{q} + b_0\,q = F_{qext}$$

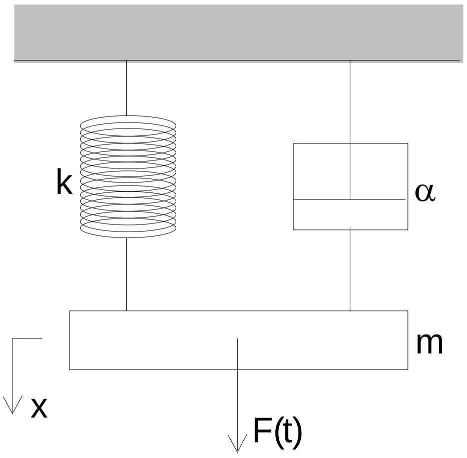
Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, avec second membre

$$\ddot{q} + 2\,\delta\,\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t)$$

avec

$$\delta = \frac{\beta}{2a_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} \quad \text{et } A(t) = \frac{Fqext}{a_0}$$

3.2 Système masse-ressort-amortisseur



Système masse-ressort-amortisseur

Considérons l'exemple mécanique de la figure ci-dessus soumis à une force extérieure $\vec{F}(t)$ appliquée à la masse m. Calculons la force généralisée F_x conjuguée de la coordonnée x. Pour cela nous pouvons utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

- Soit calculer le travail dW de la force $\vec{F}(t)$ pour une variation $d\vec{r}$ de son point d'application

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dx$$

On en déduit la x-composante de la force extérieure

$$F_x = \frac{dW}{dx} = F(t)$$

- Soit utiliser la définition de la force généralisée

$$F_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = F(t)$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A(t)$$

avec :

$$\delta = \alpha/2m \ , \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ \text{ et } \ A(t) = F(t)/m$$

3.3 Solution de l'équation différentielle

La solution de cette équation différentielle du second ordre est égale à la somme de la solution de l'équation sans second membre (ou solution homogène) $x_H(t)$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre $x_P(t)$:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

Nous avons déjà étudié l'équation sans second membre $x_H(t)$ et nous savons que cette solution contient dans tous les cas le terme exponentiel $e^{-\delta t}$. Après un temps t supérieur à $3/\delta$ ou $4/\delta$, le terme $e^{-\delta t}$ devient très petit et la solution homogène est alors pratiquement nulle. Il ne subsistera que la solution particulière de l'équation avec second membre. L'intervalle de temps pendant lequel la solution homogène est non négligeable est appelé le régime transitoire. A la fin de ce régime transitoire commence l'intervalle de temps pour lequel la solution homogène est quasi-nulle et pour lequel la solution $x(t) \simeq x_p(t)$; ce régime est appelé régime permanent ou stationnaire.

3.3.1 Cas particulier où A(t) = $\mathbf{A_0}$ cos(Ωt)

a) Calcul de la solution permanente l'aide de la méthode des nombres complexes

Pour t suffisamment grand, nous pouvons considérer que la solution transitoire s'est annulée et que la solution $x(t)$ s'identifie alors avec la solution particulière : $x(t) \simeq x_P(t)$. Par commodité de notation l'indice $_p$ est sous-entendu dans ce qui suit. La méthode des nombres complexes permet de calculer aisément la solution stationnaire.

Soit le déplacement complexe représenté par le nombre complexe $\mathcal{X} = \underline{X}\, e^{j\Omega t}$, avec $\underline{X} = X_0\, e^{j\varphi}$. Nous pouvons considérer, en outre, que $A(t) = A_0\, \cos(\Omega t)$ constitue la partie réelle du nombre complexe $\mathcal{A} = A_0\, e^{j\Omega t}$. L'équation différentielle se transforme en une simple équation algébrique en fonction de l'amplitude complexe $\underline{X}$:

$$\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + j\, 2\, \delta\, \Omega\right] \underline{X} = A_0$$

dont la solution est :

$$\underline{X} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j\, 2\, \delta\, \Omega}$$

D'où l'on tire l'amplitude X_0 et la phase φ :

$$X_0 = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\, \delta^2\, \Omega^2}}$$

$$\varphi = -\arctan \frac{2\, \delta\, \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

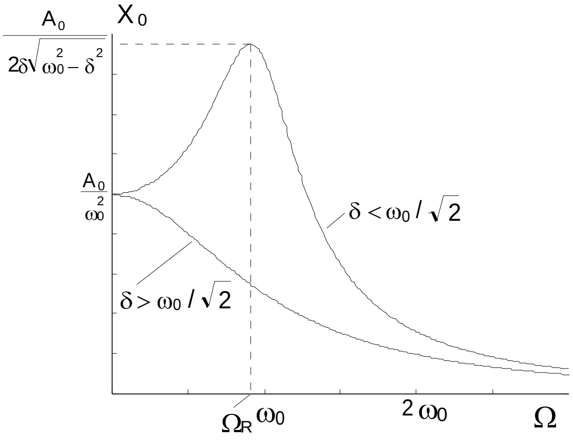
b) Etude des variations de l'amplitude et de la phase en fonction de la pulsation de l'excitation

Le maximum de l'amplitude est obtenu pour la valeur de Ω qui annule $\dfrac{dX_0}{d\Omega}$.

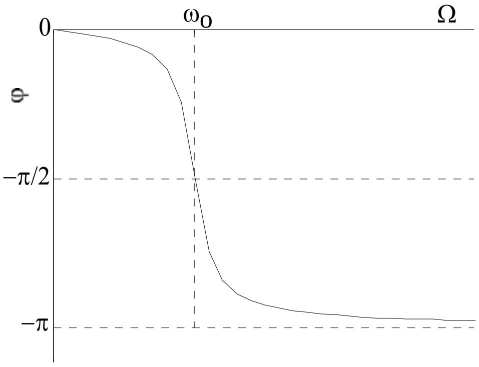
Il existe un maximum à la pulsation $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ seulement si l'amortissement est suffisamment faible pour que $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$. A cette pulsation appelée pulsation de résonance, on dit que le système entre en résonance et l'amplitude X_0 est maximale ; elle vaut :

$$X_{0\,\max} = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

La figure représentant les variations de X_0 en fonction de la pulsation d'excitation Ω est appelée courbe de résonance en amplitude. On remarque qu'à la pulsation ω_0, le déphasage φ est égal à $-\dfrac{\pi}{2}$, et qu'à la résonance $\varphi = -\arctan\left(\dfrac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}{\delta}\right)$.



Amplitude X_0 en fonction de Ω



Déphasage φ en fonction de Ω

c) Etude de la résonance pour les faibles amortissements

Dans le cas des faibles amortissements ($\delta << \omega_0$), la fréquence de résonance est très peu différente de la pulsation propre, $\Omega_R \simeq \omega_0$. Dans ce cas, l'amplitude de vibration à la résonance $X_{0\,\max}$ est égale à :

$$X_{0\,\max} = \frac{A_0}{2\delta\omega_0}$$

Pour les faibles amortissements, $X_{0\,\max}$ est donc inversement proportionnel à δ.

d) Etude de la vitesse

En notation complexe, la vitesse s'écrit :

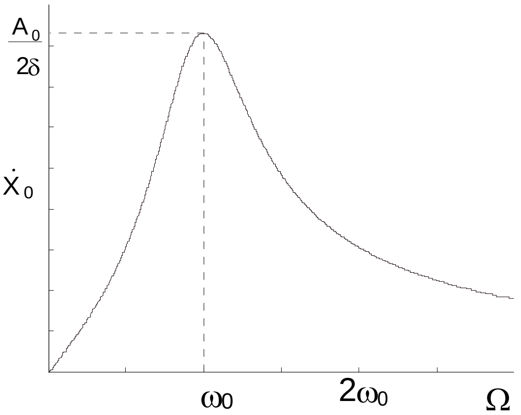
$$\mathcal{V}(t) = \frac{d\mathcal{X}}{dt} = j\Omega\mathcal{X} = \underline{\dot{X}}\, e^{j\Omega t}$$

où l'amplitude complexe de la vitesse est définie par

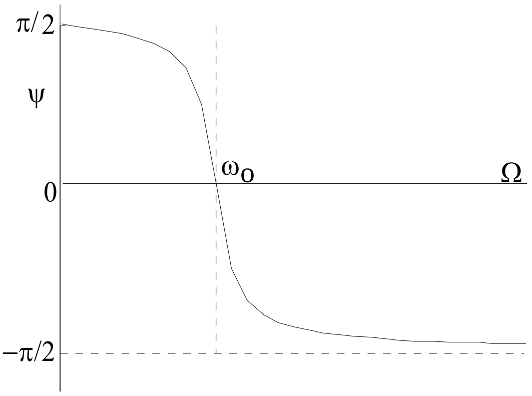
$$\underline{\dot{X}} = j\Omega \underline{X} = \frac{j\,\Omega\,A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j\,2\,\delta\,\Omega}$$

L'étude des variations de l'amplitude de la vitesse en fonction de la pulsation d'excitation montre que, quelle que soit la valeur de δ, la résonance en vitesse est obtenue pour $\Omega = \omega_0$ (voir figure ci-dessous). La valeur maximale de l'amplitude de la vitesse vaut dans ce cas :

$$\dot{X}_{\text{max}} = \dot{X}(\omega_0) = \frac{A_0}{2\,\delta}$$



Courbe de résonance de la vitesse



Déphasage ψ de la vitesse en fonction de Ω

e) Bilan énergétique

Soit $P_F(t)$ la puissance instantanée fournie par la force extérieure $F(t)$ au système. En régime permanent, on obtient :

$$P_F(t) = F(t)\,\dot{x}(t) = F_0 \dot{X}_0 \cos(\Omega t)\, \cos(\Omega t + \psi)$$

Soit $< P_F >$ la valeur moyenne sur une période de $P_F(t)$:

$$< P_F >= \frac{1}{2} F_0 \dot{X}_0 \,\cos(\psi)$$

En tenant compte de l'expression de $\dot{X}_0$ en fonction de F_0, on obtient :

$$< P_F >= \frac{1}{2} \alpha \dot{X}_0^2$$

Comparons cette valeur à la valeur moyenne $< P_D >$ de la puissance dissipée par les forces de frottement de viscosité. La valeur instantanée de cette puissance dissipée s'écrit :

$$P_D(t) = \alpha \dot{x}^2 = \alpha \dot{X}_0^2 \cos^2(\Omega t + \psi)$$

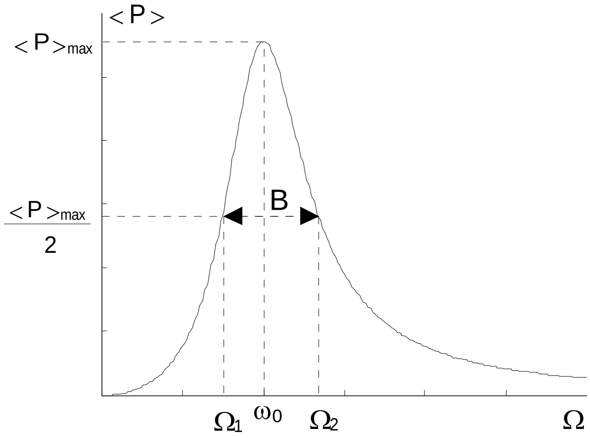
D'où l'on tire la valeur moyenne sur une période :

$$< P_D >= \frac{1}{2}\alpha \dot{X}_0^2$$

L'étude des variations de la valeur moyenne de la puissance $< P >=< P_F >=< P_D >$ en fonction de la pulsation d'excitation montre que la valeur maximale de la puissance moyenne est obtenue pour $\Omega = \omega_0$ quelle que soit la valeur de δ. La valeur maximale de la puissance moyenne dissipée ou fournie vaut dans ce cas

$$< P >_{\max}= \frac{F_0^2}{2\alpha}$$

La figure ci-dessous représente les variations, en fonction de Ω, de la puissance moyenne dissipée par les forces de frottements (ou de la puissance moyenne fournie par la force extérieure).



Courbe de résonance pour la puissance

f) Bande passante

On définit par bande passante, la bande des pulsations autour de $\Omega = \omega_0$ pour lesquelles $< P >\geq< P >_{\max} /2$. Les deux pulsations Ω_1 et Ω_2 ,situées de part et d'autre de la pulsation ω_0 et pour lesquelles $< P >=< P >_{\max} /2$, sont appelées pulsations de coupure. La bande passante B s'écrit :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1$$

Le calcul de B consiste à rechercher les deux pulsations pour lesquelles $< P >=< P >_{\max} /2$. On obtient l'expression de la bande passante B :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\delta$$

g) Coefficient de qualité d'un oscillateur

Le coefficient de qualité d'un oscillateur est défini par le rapport de la pulsation propre ω_0 à la largeur de bande B :

$$Q = \frac{\omega_0}{B}$$

3.3.2 Cas d'une excitation périodique

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent la réponse d'un système vibratoire à une excitation sinusoïdale dite excitation harmonique. En pratique, les excitations mécaniques ne sont pas toujours parfaitement sinusoïdales ; elles sont souvent périodiques. En considérant le cas d'excitations périodiques, nous procèderons à une généralisation du cas harmonique.

Soit une excitation périodique appliquée à un système amorti à un degré de liberté. L'équation différentielle qui régit ce système s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\,\delta\,\dot{q} + \omega_0^2\,q = A(t)$$

La fonction $A(t)$ étant périodique, de période T, son développement de Fourier s'écrit :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\,\delta\,\dot{q} + \omega_0^2\,q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

La réponse permanente (ou stationnaire) qui s'identifie avec la solution particulière, pour t suffisamment élevé, peut alors être calculée pour chacune des composantes de l'excitation : $a_0/2$, $a_n \cos(n\omega t)$, $b_n \sin(n\omega t)$. On obtient alors par superposition :

$$q(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(\omega_n t + \psi_n) + b_n \sin(\omega_n t + \psi_n)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega_n^2}}$$

3.4 Impédance mécanique

3.4.1 Définition

Considérons un système mécanique soumis à une force sinusoïdale $F\,(t) = F_0 \cos\,(\Omega t)$. En régime permanent, le point d'application de cette force se déplace avec une vitesse $v\,(t) =$

$V_0 \cos(\Omega t + \phi)$. On appelle impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force F et de la vitesse v

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{V}}$$

3.4.2 Impédances mécaniques

Amortisseur

Dans le cas d'un amortisseur, la force appliquée est reliée à la vitesse par

$$F = \alpha v$$

On en déduit l'impédance complexe d'un amortisseur

$$\underline{Z}_\alpha = \alpha$$

Masse

Dans le cas d'une masse, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

On en déduit l'impédance complexe d'une masse

$$\underline{Z}_m = jm\Omega = m\Omega\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Ressort

Dans le cas d'un ressort de raideur k, la force appliquée f appliquée au ressort s'exprime en fonction de l'allongement par

$$f = k\, x$$

On en déduit l'impédance complexe d'un ressort

$$\underline{Z}_k = \frac{k}{j\Omega} = -j\frac{k}{\Omega} = \frac{k}{\Omega}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

3.4.3 Puissance

La valeur moyenne, sur une période, de la puissance fournie est

$$< P_F >= \frac{1}{2} F_0 \dot{X}_0 \,\cos(\phi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{Z_E}\right) \dot{X}_0^2$$

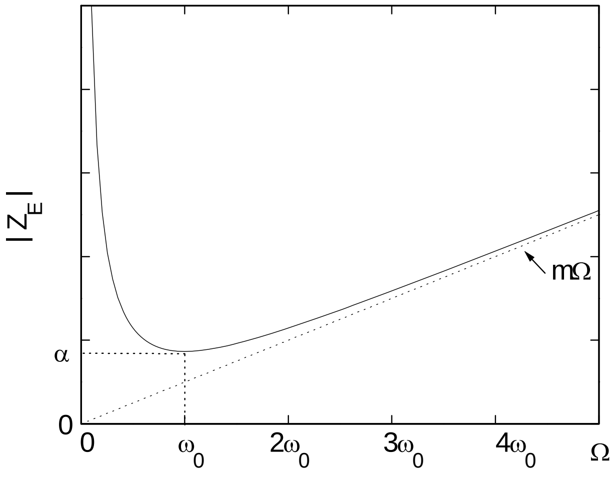
3.4.4 Applications

Système mécanique résonant

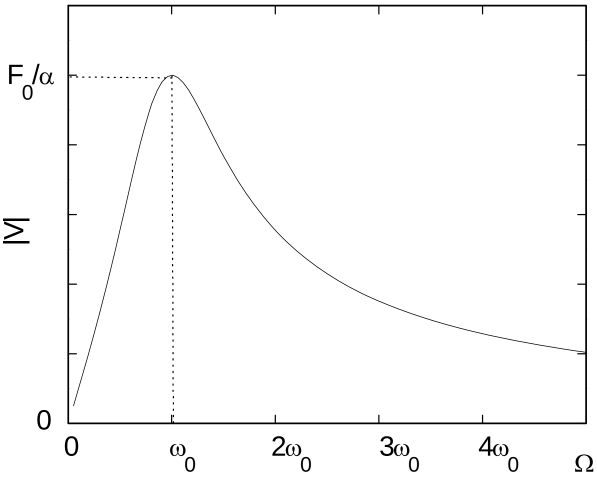
Soit un système mécanique constitué d'un ressort de raideur k, d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α et d'une masse m soumise à une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. L'impédance d'entrée de ce système est

$$\underline{Z}_E = \alpha + j\left(m\Omega - \frac{k}{\Omega}\right)$$

A la résonance $\left(\Omega = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$, le module de l'impédance est $Z_E = \alpha$. Lorsque la pulsation $\Omega \rightarrow \infty$, l'impédance $\underline{Z}_E \simeq jm\Omega$.



Module de l'impédance d'entrée



Amplitude de la vitesse

Système antirésonant

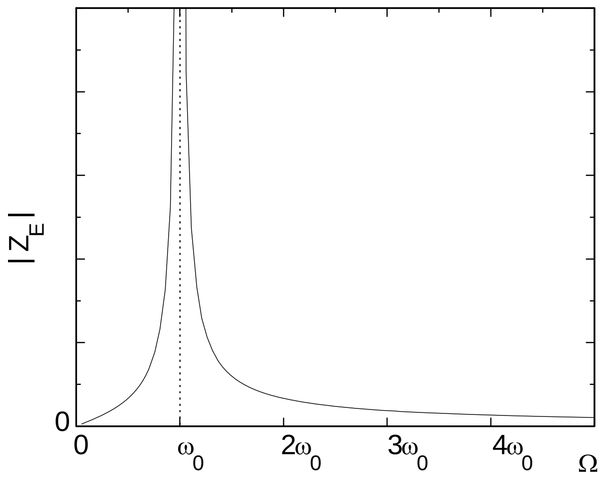
Considérons un circuit constitué par un ressort de raideur k dont une extrémité est reliée à une masse m et dont l'autre est soumise à une force sinusoïdale $F(t)$. Soit x le déplacement de la masse m et soit y le déplacement du point d'application de la force $F(t)$. Pour calculer l'impédance d'entrée de ce système, nous devons d'abord écrire les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{array}{rcl} m\ddot{x} & = & k(x-y) \\ F & = & k(x-y) \end{array}$$

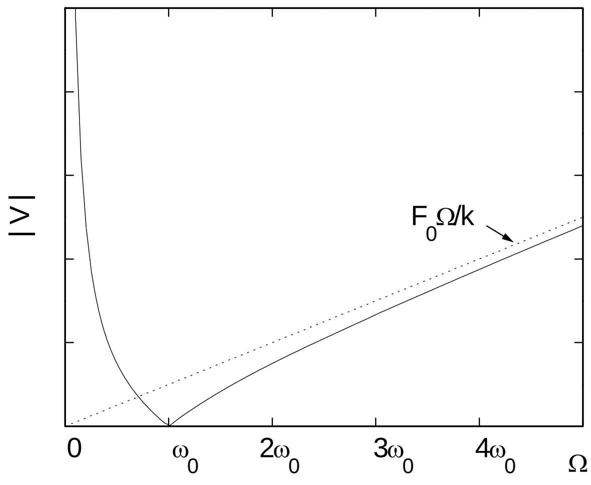
En utilisant la notation complexe, on obtient l'impédance d'entrée :

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{\dot{Y}}} = -j\frac{km}{\left[m\Omega - \dfrac{k}{\Omega}\right]}$$

La pulsation d'antirésonance est $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Lorsque $\Omega = \omega_0$, la vitesse $\dot{Y}$ est nulle tandis que le module de l'impédance est ∞. Lorsque la pulsation $\Omega \to \infty$, l'impédance $Z_E \to 0$.



Module de l'impédance d'entrée



Amplitude de la vitesse

Chapitre 4

Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

4.1 Introduction

Les systèmes qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté.

Exemples

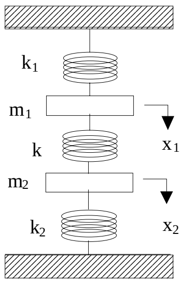


Figure 1

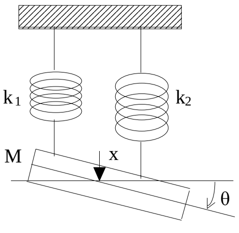


Figure 2

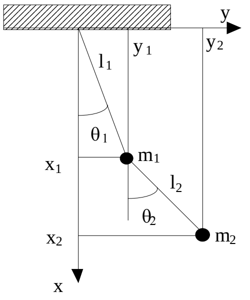


Figure 3

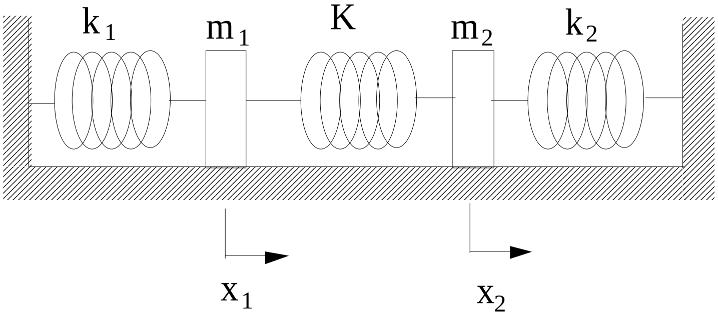
- **Figure 1** Si les masses m_1 et m_2 sont astreintes à se déplacer verticalement, 2 coordonnées x_1 et x_2 sont nécessaires pour spécifier la position de chaque masse à chaque instant.
- **Figure 2** Si la masse M est astreinte à se déplacer dans un plan vertical, deux coordonnées sont nécessaires pour spécifier la configuration du système. L'une de ces coordonnées peut être le déplacement x qui correspond à la translation verticale de la masse. L'autre coordonnée peut être le déplacement angulaire θ pour tenir compte de la rotation de la masse. Ces deux coordonnées sont indépendantes l'une de l'autre.
- **Figure 3** Dans le cas du double pendule, deux coordonnées sont nécessaires pour spécifier la position des masses $m_1$et m_2. Plusieurs choix sont pourtant possibles, en effet on peut choisir (x_1, x_2) ou (y_1, y_2) ou (θ_1, θ_2).

Il est possible de spécifier la configuration d'un système à l'aide de plusieurs ensembles de coordonnées indépendantes ; un ensemble quelconque de ces coordonnées est appelé coordonnées généralisées. Il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté ou de coordonnées généralisées. Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right] - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right] - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

4.2 Systèmes à deux degrés de liberté

4.2.1 Système masses-ressorts en translation



Considérons le système ci-dessus, constitué de deux masses $m_1$et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur $k_1$et k_2 à deux bâtis fixes. Les deux masses sont reliées par un ressort de raideur K. Ce ressort est appelé ressort de couplage.

Equations différentielles du mouvement

Les équations du mouvement pour ce système à deux degrés de liberté peuvent être obtenues à partir des équations de Lagrange pour chaque coordonnée $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Soit T et U respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

$T = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2$

$U = \frac{1}{2} k_1\, x_1^2 + \frac{1}{2} K\, (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2\, x_2^2$

$U = \frac{1}{2}\, (k_1 + K)\, x_1^2 + \frac{1}{2}\, (k_2 + K)\, x_2^2 - K x_1 x_2$

Le lagrangien $L = T - U$ s'écrit alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\, (k_1 + K)\, x_1^2 - \frac{1}{2}\, (k_2 + K)\, x_2^2 + K x_1 x_2$$

Les équation de Lagrange s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right] - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right] - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right.$$

D'où le système d'équations différentielles du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 + \ (k_1 + K)\, x_1 - K x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + \ (k_2 + K)\, x_2 - K x_1 = 0 \end{array} \right.$$

Les termes $-Kx_2$ et $-Kx_1$ qui apparaissent respectivement dans la première et la seconde équation sont appelés termes de couplage, et les deux équations différentielles sont dites couplées.

Résolution des équations différentielles

Les deux solutions de ces deux équations différentielles sont des fonctions périodiques et sont composées de deux fonctions harmoniques de pulsations différentes et d'amplitudes différentes. Supposons que l'une de ces composantes harmoniques s'écrive

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

où A_1, A_2 et ϕ sont des constantes et ω l'une des pulsations propres du système. La substitution de x_1 et x_2 dans le système d'équations différentielles donne

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1 + K - m_1 \omega^2]\ A_1 - K A_2 = 0 \\ - K A_1 + [k_2 + K - m_2 \omega^2]\ A_2 = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui constitue un système d'équations linéaires homogènes dont les inconnues sont A_1 et A_2. Ce système admet une solution non identiquement nulle seulement si le déterminant $\Delta(\omega)$ des coefficients de A_1 et A_2 est égal à zéro.

$$\Delta(\omega) = \left| \begin{array}{cc} [k_1 + K - m_1 \omega^2] & - K \\ - K & [k_2 + K - m_2 \omega^2] \end{array} \right|$$

Le déterminant $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $\Delta(\omega) = 0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit

$$\left[k_1 + K - m_1 \omega^2\right] \left[k_2 + K - m_2 \omega^2\right] - K^2 = 0$$

ou encore

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{k_1 + K}{m_1} + \frac{k_2 + K}{m_2}\right] + \frac{k_1 k_2 + k_1 K + k_2 K}{m_1\, m_2} = 0$$

Cette équation est une équation quadratique en ω qui admet deux solutions réelles positives ω_1 et ω_2 appelées les pulsations propres du système

Cet exemple montre qu'il y a en général deux pulsations propres dans un système à deux degrés de liberté. Chacune des coordonnées, $x_1$et x_2, possède deux composantes harmoniques de pulsations $\omega_1$et ω_2

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_{12}\cos(\omega_2 t+\phi_2) \\ x_2 &= A_{21}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_{22}\cos(\omega_2 t+\phi_2) \end{aligned}$$

où A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes. Le terme de plus basse fréquence correspondant à la pulsation ω_1 est appelé le fondamental. L'autre terme, de pulsation ω_2, est appelé harmonique.

Les doubles indices sont utilisés pour les amplitudes des différentes composantes harmoniques ; le premier indice se réfère à la coordonnée et le second à la pulsation. Par exemple A_{12} est l'amplitude de x_1(t) à la pulsation ω_2.

Lorsque $A_{12}=A_{22}=0$, $x_1$et x_2 correspondent à la première solution particulière sont des fonctions sinusoïdales, en phase, de pulsation ω_1 ; on dit que le système oscille dans le premier mode. Dans ce cas

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}\cos(\omega_1 t+\phi_1) \\ x_2 &= A_{21}\cos(\omega_1 t+\phi_1) \end{aligned}$$

Lorsque $A_{11}=A_{21}=0$, $x_1$et x_2 correspondent à la seconde solution particulière et sont des fonctions sinusoïdales, en opposition de phase, de pulsation ω_2 ; on dit que le système oscille dans le second mode. Dans ce cas

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{12}\cos(\omega_2 t+\phi_2) \\ x_2 &= A_{22}\cos(\omega_2 t+\phi_2) \end{aligned}$$

Etudions les particularités de ces deux solutions particulières :

- La première solution particulière s'écrit :

  $$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}\cos(\omega_1 t+\phi_1) \\ x_2 &= A_{21}\cos(\omega_1 t+\phi_1) \end{aligned}$$

  x_1 et x_2 doivent vérifier le système d'équations différentielles, ce qui donne

  $$\begin{cases} [k_1+K-m_1\omega_1^2]\,A_{11}-K\,A_{21}=0 \\ -K\,A_{11}+[k_2+K-m_2\omega_1^2]\,A_{21}=0 \end{cases}$$

  Ces deux équations permettent d'obtenir le rapport des amplitudes dans le premier mode ou fondamental

  $$\mu_1=\frac{A_{21}}{A_{11}}=\frac{k_1+K-m_1\omega_1^2}{K}=\frac{K}{k_2+K-m_2\omega_1^2}$$

– La seconde solution particulière s'écrit :

$$\begin{array}{l} x_1 = A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{array}$$

x_1 et x_2 doivent vérifier le système d'équations différentielles, ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} [k_1 \;+\; K \;-\; m_1\,\omega_2^2]\;A_{12} \;-\; K\,A_{22} \;=\; 0 \\ -\;K\,A_{12} \;+\; [k_2 \;+\; K \;-\; m_2\,\omega_2^2]\;A_{22} \;=\; 0 \end{array} \right.$$

Ces deux équations permettent d'obtenir le rapport des amplitudes dans le second mode ou harmonique

$$\mu_2 \;=\; \frac{A_{22}}{A_{12}} \;=\; \frac{k_1 \;+\; K \;-\; m_1\,\omega_2^2}{K} \;=\; \frac{K}{k_2 \;+\; K \;-\; m_2\,\omega_2^2}$$

– La solution générale (x_1, x_2) est une combinaison linéaire de ces deux solutions particuières. $x_1$et x_2s'écrivent alors

$$\begin{array}{lcl} x_1 &=& A_{11}\cos\left(\omega_1 t + \phi_1\right) + A_{12}\cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right) \\ x_2 &=& \mu_1\;A_{11}\cos\left(\omega_1 t + \phi_1\right) + \mu_2\,A_{12}\cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right) \end{array}$$

où A_{11}, A_{12}, ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes d'intégration dont les valeurs sont fixées par les conditions initiales.

4.2.2 Cas particulier de deux oscillateurs identiques

Calcul des constantes d'intégration

Considérons le cas particulier de deux oscillateurs identiques tels que $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$. Dans ce cas les pulsations propres sont respectivement égales à

$$\omega_1 \;=\; \sqrt{\tfrac{k}{m}}$$

$$\omega_2 \;=\; \sqrt{\tfrac{k+2\,K}{m}} \;=\; \omega_1\,\sqrt{1 \;+\; \tfrac{2\,K}{k}}$$

Les rapports d'amplitudes correspondant à ces pulsations sont respectivement $\mu_1 = +1$ et $\mu_2 = -1$.

Soit $x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}$ *et* $\dot{x}_{20}$ les valeurs initiales respectives de $x_1, x_2, \dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$. Tenant compte de ces conditions initiales, on obtient le système d'équations suivant qui permet de déterminer les constantes d'intégration A_{11}, A_{12},ϕ_1 et ϕ_2

$$\begin{array}{l} A_{11}\;\cos(\phi_1) + A_{12}\;\cos(\phi_2) = x_{10} \\ A_{11}\;\cos(\phi_1) - A_{12}\;\cos(\phi_2) = x_{20} \\ -\omega_1\;A_{11}\;\sin(\phi_1) - \omega_2\,A_{12}\;\sin(\phi_2) = \dot{x}_{10} \\ -\omega_1\;A_{11}\;\sin(\phi_1) + \omega_2\,A_{12}\;\sin(\phi_2) = \dot{x}_{20} \end{array}$$

Les solutions de ce système d'équations sont

$$A_{11} = \frac{x_{10} + x_{20}}{2\ \cos(\phi_1)} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{x_{10} - x_{20}}{2\ \cos(\phi_2)}$$

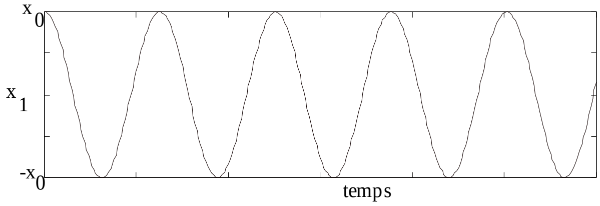
ou encore

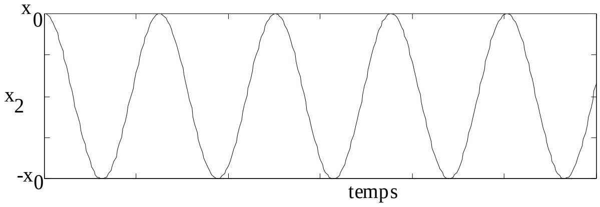
$$A_{11} = \frac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{2\ \omega_1\ \sin(\phi_1)} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{\dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{2\ \omega_2\ \sin(\phi_2)}$$

1. Considérons le cas particulier suivant $x_{10} = x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$; on obtient dans ce cas $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{12} = 0$ et $A_{11} = x_0$; d'où

   $$x_1 = x_0\ \cos(\omega_1 t)$$
   $$x_2 = x_0\ \cos(\omega_1 t)$$

   Pour ces conditions initiales particulières, les deux masses oscillent en phase à la même pulsation ω_1. On dit que le système oscille dans le premier mode.

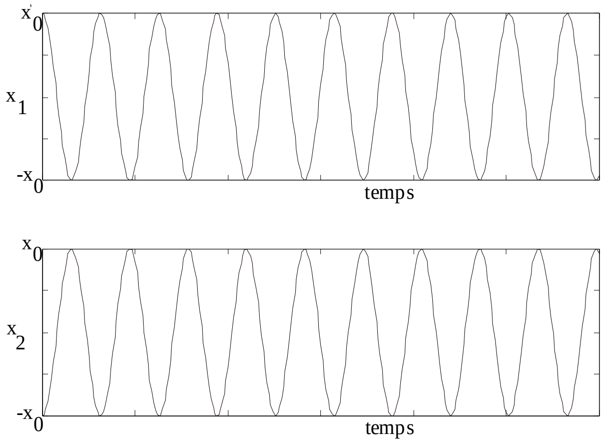




2. Considérons un autre cas particulier pour lequel $x_{10} = -x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$. On obtient dans ce cas $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{11} = 0$ et $A_{12} = x_0$; d'où

   $$x_1 = x_0\ \cos(\omega_2 t)$$
   $$x_2 = -x_0\ \cos(\omega_2 t)$$

   On dit que le système oscille dans le second mode car les deux masses oscillent en opposition de phase avec le même pulsation ω_2.



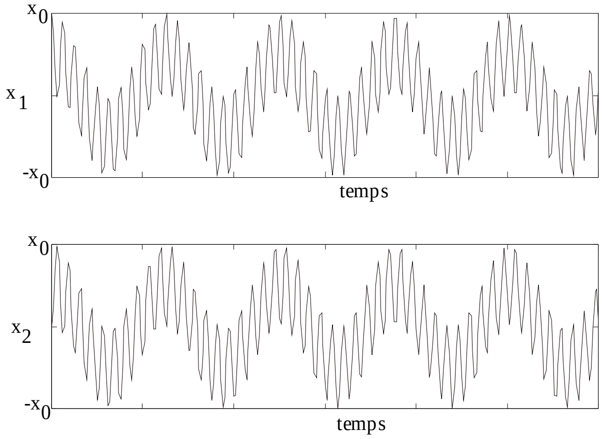
3. Considérons enfin le cas particulier suivant $x_{10} = x_0$, $x_{20} = 0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$; d'où $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{11} = A_{12} = x_0/2$. Les solutions s'écrivent alors sous la forme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{x_0}{2} \cos\left(\omega_1\, t\right) + \tfrac{x_0}{2} \cos\left(\omega_2\, t\right) \\ x_2(t) &= \tfrac{x_0}{2} \cos\left(\omega_1\, t\right) - \tfrac{x_0}{2} \cos\left(\omega_2\, t\right) \end{aligned}$$

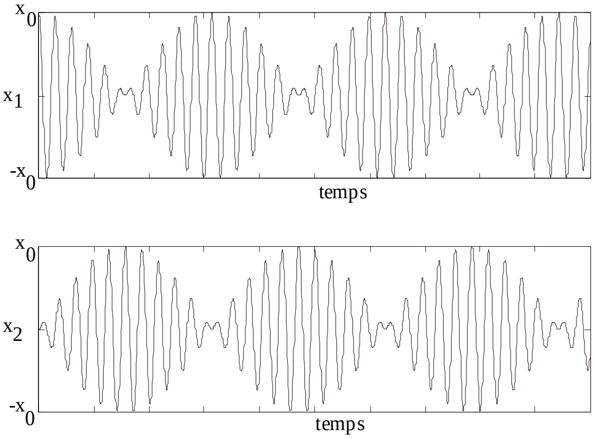
Les solutions ne sont plus des fonctions purement sinusoïdales du temps mais des combinaisons linéaires de deux fonctions sinusoïdales de pulsations respectives ω_1 et ω_2. x_1 et x_2 peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_1\left(t\right) &= x_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ x_2\left(t\right) &= x_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{aligned}$$

La figure suivante représente le résultat obtenu dans le cas où ω_1 est très différent de ω_2 (c'est-à -dire si $K >> k$).



Si ω_1 est peu différent de ω_2 (c'est-à -dire si $K << k$), on observe un phénomène de battement (voir figure ci-dessous).



Coordonnées principales

Considérons les coordonnées p_1 et p_2 obtenues à partir des coordonnées x_1 et x_2 par les relations

$$\begin{aligned} p_1 &= \tfrac{x_1 + x_2}{2} \\ p_2 &= \tfrac{x_1 - x_2}{2} \end{aligned}$$

Tenant compte des expressions de x_1 et x_2 et des valeurs particulières de μ_1 et μ_2 pour l'exemple étudié, on obtient

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{x_0}{2}\cos\left(\omega_1 t\right) \\ p_2 &= \frac{x_0}{2}\cos\left(\omega_2 t\right) \end{aligned}$$

On remarque que, quelles que soient les conditions initiales, p_1 et p_2 sont des fonctions purement sinusoïdales du temps de pulsations respectives $\omega_1$et ω_2. Ces coordonnées particulières sont appelées coordonnées principales. On peut vérifier que le système d'équations différentielles qui régit le mouvement du système considéré s'écrit sous la forme de deux équations découplées

$$\begin{gathered} \ddot{p}_1 + \omega_1^2\, p_1 = 0 \\ \ddot{p}_2 + \omega_2^2\, p_2 = 0 \end{gathered}$$

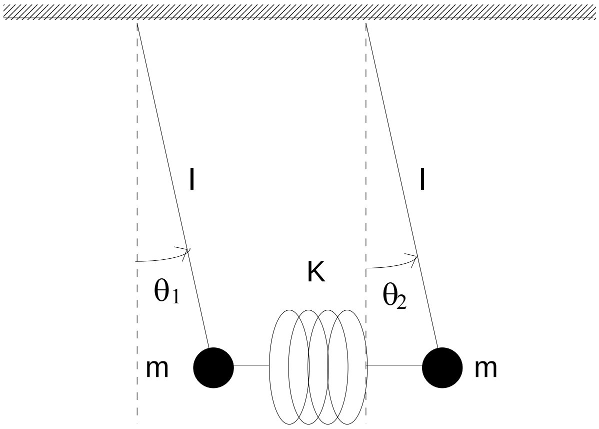
Les relations inverses suivantes

$$\begin{gathered} x_1 = p_1 + p_2 \\ x_2 = p_1 - p_2 \end{gathered}$$

permettent d'obtenir les coordonnées $x_1$et x_2 à partir des coordonnées principales p_1 et p_2.

4.2.3 Pendules couplés

Considérons le cas de deux pendules simples identiques couplés par un ressort de raideur K et qui effectuent des oscillations de faible amplitude repérées par les angles $\theta_1$et θ_2.



Etablissons tout d'abord les équations différentielles du mouvement dans le cas des oscillations de faible amplitude. Il est aisé de montrer que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'écrivent sous les formes quadratiques suivantes

$$\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}ml^2\ \dot{\theta}_1^2\ + \frac{1}{2}ml^2\ \dot{\theta}_2^2 \\ U = \frac{1}{2}\left[Kl^2 + mgl\right]\theta_1^2 + \frac{1}{2}\left[Kl^2 + mgl\right]\theta_2^2 - Kl^2\theta_1\theta_2 \end{array}$$

On remarque la présence du terme de couplage $-Kl^2\theta_1\theta_2$ dans l'expression de l'énergie potentielle. Comme dans l'exemple précédent, on dit que le couplage est élastique. Si le terme de couplage n'existe que dans l'expression de l'énergie cinétique, on dit que le couplage est de type inertiel.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations différentielles du mouvement

$$\begin{array}{c} ml^2\ddot{\theta}_1 + \left[Kl^2 + mgl\right]\theta_1 - Kl^2\theta_2 = 0 \\ -Kl^2\theta_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + \left[Kl^2 + mgl\right]\theta_2 = 0 \end{array}$$

En l'absence d'amortissement la solution de ce système d'équations différentielles est de la forme

$$\begin{array}{c} \theta_1(t) = A_1\ \cos(\omega t + \phi) \\ \theta_2(t) = A_2\ \cos(\omega t + \phi) \end{array}$$

Ces deux expressions doivent satisfaire le système d'équations différentielles, d'où

$$\begin{array}{c} \left[Kl^2 + mgl - ml^2\omega^2\right]A_1 - Kl^2A_2 = 0 \\ -Kl^2A_1 + \left[Kl^2 + mgl - ml^2\omega^2\right]A_2 = 0 \end{array}$$

Ce système d'équations admet des solutions non nulles seulement si ω est solution de l'équation aux fréquences

$$\left[Kl^2 + mgl - ml^2\omega^2\right]^2 - K^2l^4 = 0$$

D'où l'on tire l'expression des pulsations propres $\omega_1$et ω_2

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\text{et } \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{m}}$$

Les solutions du système d'équations différentielles sont donc

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \theta_2 &= A_{21}\cos\,(\omega_1 t + \phi_1) + A_{22}\cos\,(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

Pour calculer les rapports des amplitudes dans les modes, on suppose que le système oscille soit dans le premier mode soit dans le second mode. Dans le premier mode, on obtient le système

$$\begin{aligned} &[Kl^2 + mgl - ml^2\omega_1^2] - Kl^2\mu_1 = 0 \\ &-Kl^2 + [Kl^2 + mgl - ml^2\omega_1^2]\,\mu_1 = 0 \end{aligned}$$

Dans le second mode, on obtient

$$\begin{aligned} &[Kl^2 + mgl - ml^2\omega_2^2] - Kl^2\mu_2 = 0 \\ &-Kl^2 + [Kl^2 + mgl - ml^2\omega_2^2]\,\mu_2 = 0 \end{aligned}$$

Tenant compte des expressions de $\omega_1$et ω_2 on obtient les valeurs du rapport des amplitudes dans les modes $\mu_1 = +1$ et $\mu_2 = -1$. Les solutions du système d'équations différentielles s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A_{11}\cos\,(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos\,(\omega_2 t + \phi_2) \\ \theta_2 &= A_{11}\cos\,(\omega_1 t + \phi_1) - A_{12}\cos\,(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

Chapitre 5

Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

5.1 Equations de Lagrange

Soit un système à deux degrés de liberté, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, à des forces de frottement de viscosité et des forces extérieures. Si les coordonnées généralisées sont q_1 et q_2, les équations de Lagrange s'écrivent :

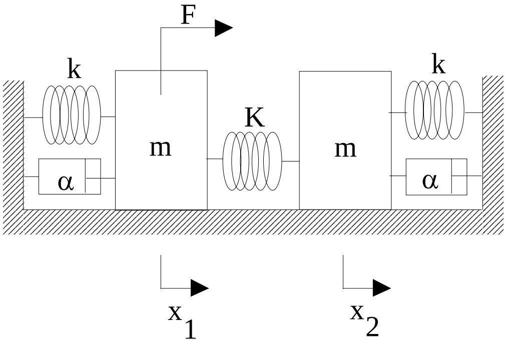
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} &= F_{q_1} \\
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} &= F_{q_2}
\end{aligned}$$

Dans cette expression F_{q_1} et F_{q_2} sont les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées respectives q_1 et q_2. Elles sont respectivement définies par

- $F_{q_1} = \left.\frac{\delta W}{\delta q_1}\right|_{\substack{\delta q_1 \neq 0 \\ \delta q_2 = 0}}$, dans cette expression δW_1 représente le travail des forces extérieures pour une variation δq_1 de la coordonnée q_1, lorsque $\delta q_2 = 0$.
- $F_{q_2} = \left.\frac{\delta W}{\delta q_2}\right|_{\substack{\delta q_1 = 0 \\ \delta q_2 \neq 0}}$, dans cette expression δW_2 représente le travail des forces extérieures pour une variation δq_2 de la coordonnée q_2, lorsque $\delta q_2 = 0$.

5.2 Système masses-ressorts-amortisseurs

Pour étudier les particularités des oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté, étudions le système symétrique suivant soumis à une force horizontale F, appliquée à la première masse.



5.2.1 Equations différentielles

Les équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + (k+K)\,x_1 + \alpha\dot{x}_1 - Kx_2 &= F \\ -Kx_1 + m\ddot{x}_2 + (k+K)\,x_2 + \alpha\dot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

5.2.2 Etude du régime permanent sinusoïdal

Solution permanente

La solution générale de système d'équations différentielles est égale à la solution de la solution du système homogène et d'une solution particulière. La solution de l'équation homogène, en raison de l'amortissement, tend vers zéro lorsque le temps augmente. Lorsque le régime permanent s'établit, la solution devient égale à la solution permanente et s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos(\Omega t + \phi_1) \\ x_2 &= X_2 \cos(\Omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

Pour calculer les amplitudes X_1 et X_2, ainsi que les phases ϕ_1 et ϕ_2, utilisons la méthodes des nombres complexes. On peut ainsi écrire :

$$x_1 = \mathrm{Re}\left(\underline{X}_1\, e^{j\Omega t}\right) \qquad x_2 = \mathrm{Re}\left(\underline{X}_2\, e^{j\Omega t}\right) \qquad F = \mathrm{Re}\left(\underline{F}\, e^{j\Omega t}\right)$$

Dans ces expressions les amplitudes complexes sont définies par

$$\underline{X}_1 = X_1\, e^{j\phi_1} \qquad \underline{X}_2 = X_2\, e^{j\phi_2} \qquad \underline{F} = F_0\, e^{j0}$$

Dans ce cas les équations différentielles se transforment en équations algébriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} (k+K-m\Omega^2+j\alpha\Omega)\,\underline{X}_1 - K\underline{X}_2 = \underline{F} \\ -K\underline{X}_1 + (k+K-m\Omega^2+j\alpha\Omega)\,\underline{X}_2 = 0 \end{array} \right.$$

Amortissement négligeable

Considérons d'abord le cas d'un amortissement suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que $\alpha \simeq 0$. Le système d'équations différentielles s'écrit alors

$$\begin{cases} \left(k+K-m\Omega^2\right)\underline{X}_1 - K\underline{X}_2 = \underline{F} \\ -K\underline{X}_1 + \left(k+K-m\Omega^2\right)\underline{X}_2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\begin{aligned} \underline{X}_1 &= \frac{\underline{F}}{m}\frac{\left(\Omega_A^2-\Omega^2\right)}{\left(\omega_1^2-\Omega^2\right)\left(\omega_2^2-\Omega^2\right)} \\ \underline{X}_2 &= \frac{K\underline{F}}{m^2}\frac{1}{\left(\omega_1^2-\Omega^2\right)\left(\omega_2^2-\Omega^2\right)} \end{aligned}$$

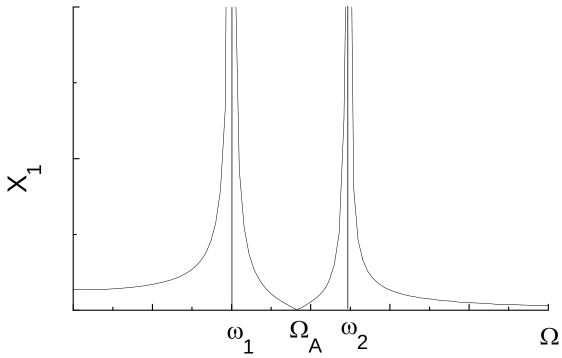
Les pulsations $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ sont les pulsations propres calculées au chapitre précédent. La valeur de la pulsation Ω_A est :

$$\Omega_A = \sqrt{\frac{k+K}{m}}$$

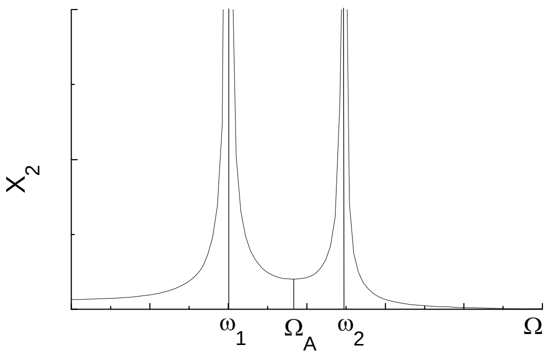
Les amplitudes des déplacements X_1 et X_2 sont alors données par

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{F}{m}\frac{\left|\Omega_A^2-\Omega^2\right|}{\left|\omega_1^2-\Omega^2\right|\left|\omega_2^2-\Omega^2\right|} \\ X_2 &= \frac{KF}{m^2}\frac{1}{\left|\omega_1^2-\Omega^2\right|\left|\omega_2^2-\Omega^2\right|} \end{aligned}$$

Les variations des amplitudes X_1 et X_2 sont représentées sur les figures ci-dessous



Variation de X_1 en fonction de Ω



Variation de X_2 en fonction de Ω

On remarque que le phénomène de résonance se produit pour X_1 comme pour X_2 lorsque la pulsation d'excitation Ω est égale à l'une des pulsations propres ω_1 ou ω_2 du système. L'amortissement étant très faible, les amplitudes à la résonance sont très importantes. Lorsque la pulsation Ω devient très grande, ces amplitudes tendent vers zéro. Enfin lorsque $\Omega = \Omega_A$, l'amplitude X_1 est égale à zéro ; pour cette raison, la pulsation Ω_A est appelée pulsation d'antirésonance.

5.3 Impédance

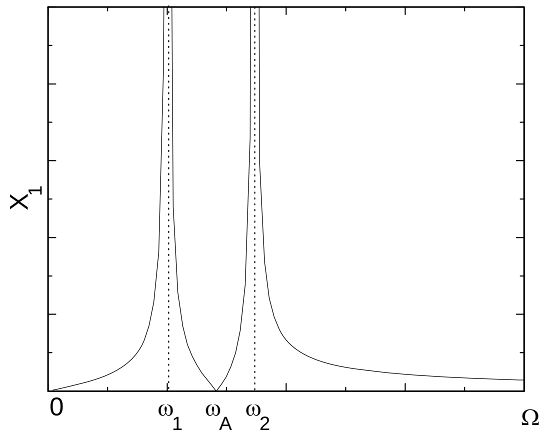
Considérons le système à deux degrés de liberté étudié dans le paragraphe précédent dans lequel nous supposons que l'amortissement est nul ($\alpha \simeq 0$). En régime stationnaire, on obtient pour l'amplitude complexe de la vitesse $\underline{\dot{X}}_1$:

$$\underline{\dot{X}}_1 = -j \frac{\Omega}{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_A^2}{\left(\Omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_2^2\right)} \underline{F}$$

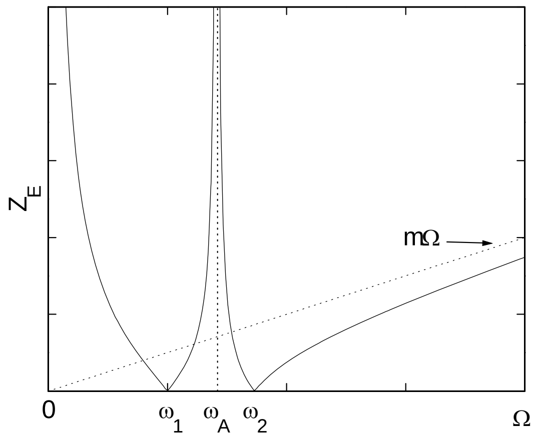
On en déduit l'impédance d'entrée :

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{F}}{\underline{\dot{X}}_1} = j \frac{m}{\Omega} \frac{\left(\Omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_2^2\right)}{\Omega^2 - \Omega_A^2}$$

Les figures ci-dessous donnent les variation de $\dot{X}$ et Z_E en fonction de Ω. On note le phénomène de résonance lorsque la pulsation d'excitation Ω est égale à l'une des deux pulsations propres ω_1 ou ω_2. A ces pulsations, le module de l'impédance d'entrée est nul. Enfin, lorsque Ω est égale à la pulsation d'antirésonance Ω_A, la vitesse de la première masse est nulle et le module de l'impédance d'entrée est infini. Lorsque $\Omega \to \infty$, $Z_E \simeq m\Omega$.



Variation de $\left|\underline{\dot{X}}_1\right|$ en fonction de Ω

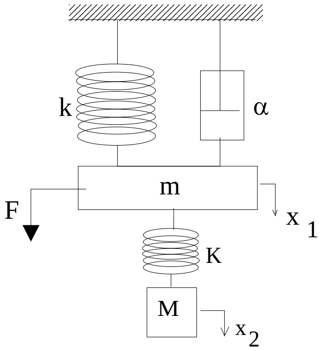


Variation de $|\underline{Z}_E|$ en fonction de Ω

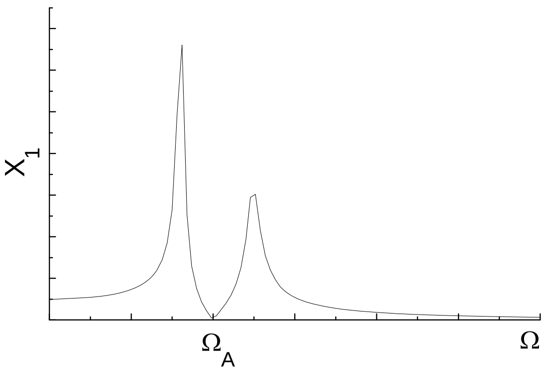
5.4 Application

Le phénomène d'antirésonance peut être avantageusement utilisé pour supprimer une vibration résultant d'une résonance dans un système mécanique.

Considérons le système à deux degrés de liberté de la figure ci-dessous.



Deux degrés de liberté



Variation de X_1 en fonction de Ω.

Les équations différentielles du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k+K)\,x_1 - Kx_2 = F \\ -Kx_1 + m\ddot{x}_2 + Kx_2 = 0 \end{cases}$$

En régime permanent sinusoïdal, on obtient

$$\underline{X}_1 = \frac{F_0}{m}\frac{\Omega^2 - \frac{K}{M}}{\left[\Omega^4 + \Omega^2\left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right] + j\frac{\alpha}{m}\Omega\left(\Omega^2 - \frac{K}{M}\right)}$$

$$\underline{X}_2 = -\frac{KF_0}{Mm}\frac{1}{\left[\Omega^4 + \Omega^2\left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right] + j\frac{\alpha}{m}\Omega\left(\Omega^2 - \frac{K}{M}\right)}$$

Lorsque la pulsation de la force excitatrice est égale à $\omega_A = \sqrt{\frac{K}{M}}$, la masse m est immobile ($X_1 = 0$).

Si on choisit K et M telles que $\frac{k}{m} = \frac{K}{M}$ (c'est-à-dire telles que $\omega_0 = \Omega_A$), la masse m est immobile lorsque la pulsation excitatrice Ω est égale à $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Dans ces conditions, l'ajout de M et K permet d'annuler la vibration de m à cette pulsation. Un tel dispositif constitue un "étouffeur" dynamique de vibrations.

Chapitre 6

Généralités sur les phénomènes de propagation

6.1 Propagation à une dimension

6.1.1 Equation de propagation

Dans les phénomènes vibratoires traités dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, le temps. Nous allons maintenant examiner toute une une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps t et d'une variable d'espace , x par exemple.

Ces phénomènes sont régis par une équation aux dérivées partielles, appelée équation d'onde ou équation de propagation à une dimension de la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \tag{6.1}$$

dans laquelle V est une grandeur physique qui a les dimensions d'une vitesse et sera appelée dans la suite vitesse de propagation.

6.1.2 Solution de l'équation de propagation

Méthode de D'Alembert

Pour résoudre l'équation des ondes à une dimension, opérons le changement de variable suivant :

$$\eta = t - \frac{x}{V} \tag{6.2}$$

$$\xi = t + \frac{x}{V} \tag{6.3}$$

Calculons les dérivées partielles par rapport à t et x, en fonction des dérivées partielles par rapport à η et ξ.

Sachant que :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{\partial \xi}{\partial t}=1 \text{ et que } \frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{V} \tag{6.4}$$

on obtient

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial \eta}+\frac{\partial s}{\partial \xi} \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{V}\left[\frac{\partial s}{\partial \eta}-\frac{\partial s}{\partial \xi}\right] \tag{6.6}$$

En tenant compte de ces résultats et sachant que

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi}=\frac{\partial^2 s}{\partial \xi \partial \eta} \tag{6.7}$$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\left[\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi}+\frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2}\right] \tag{6.9}$$

En remplaçant dans l'équation d'onde $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ par les expressions ci-dessus, on obtient l'équation d'onde exprimée en fonction des dérivées partielles par rapport aux variables η et ξ :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta \partial \xi}=0 \tag{6.10}$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial s}{\partial \xi}\right]=0 \tag{6.11}$$

Un intégration par rapport à η donne :

$$\frac{\partial s}{\partial \xi}=f\left(\eta\right) \tag{6.12}$$

où $f\left(\eta\right)$ est une fonction qui ne dépend que de η (et pas de ξ). Enfin une intégration par rapport à ξ donne :

$$s\left(\eta,\xi\right)=F\left(\eta\right)+G\left(\xi\right) \tag{6.13}$$

où $F\left(\eta\right)$, qui ne dépend que de η, est une primitive de $f\left(\eta\right)$. La fonction $G\left(\xi\right)$ est une fonction qui ne dépend que de ξ. En revenant aux variables x et t, on obtient la solution générale de l'équation des ondes à une dimension :

$$s\left(x,t\right)=F\left(t-\frac{x}{V}\right)+G\left(t+\frac{x}{V}\right) \tag{6.14}$$

Les fonctions $F\left(t-\frac{x}{V}\right)$ et $G\left(t+\frac{x}{V}\right)$ sont des fonctions dont la nature est fixée par les conditions aux frontières imposées à la solution $s\left(x,t\right)$.

Propriétés des solutions particulières $F\left(t-\frac{x}{V}\right)$ et $G\left(t+\frac{x}{V}\right)$

Propriétés de $F\left(t-\frac{x}{V}\right)$ On étudie le cas de la solution particulière $F\left(t-\frac{x}{V}\right)$. Pour cela on suppose que les conditions aux frontières sont telles que $G\left(t+\frac{x}{V}\right)$ est constamment nulle. On considère à l'instant t_1 un point d'abscisse x_1 . La valeur de la fonction s en ce point et à cet instant est $s\left(x_1, t_1\right)$. On recherche à un instant t_2 postérieur à t_1 $\left(t_2>t_1\right)$ la position x_2 d'un point pour lequel la valeur de s est la même que la valeur qu'elle avait en x_1 à l'instant t_1. Ce problème est formulé par l'égalité suivante :

$$s\left(x_1, t_1\right)=s\left(x_2, t_2\right) \tag{6.15}$$

Ce qui se traduit par

$$F\left(t_1-\frac{x_1}{V}\right)=F\left(t_2-\frac{x_2}{V}\right) \tag{6.16}$$

Cette équation est satisfaite si

$$t_1-\frac{x_1}{V}=t_2-\frac{x_2}{V} \tag{6.17}$$

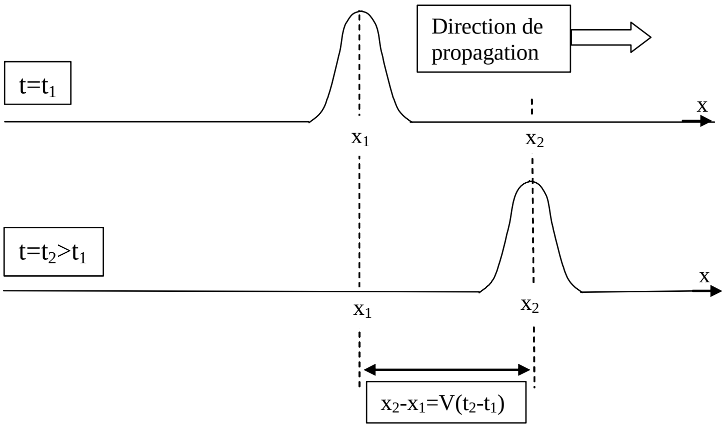
D'où la valeur de x_2 :

$$x_2=x_1+V\left(t_2-t_1\right) \tag{6.18}$$

Comme $t_2>t_1$, x_2 est supérieure à x_1 et ces deux points sont distants de

$$x_2-x_1=V\left(t_2-t_1\right) \tag{6.19}$$

$F\left(t-\frac{x}{V}\right)$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x croissants (Voir la figure ci-dessous). $F\left(t-\frac{x}{V}\right)$ est appelée onde progressive et cette expression constituera dans la suite la définition d'une onde progressive.



Propriétés de $G\left(t+\frac{x}{V}\right)$ On étudie le cas de la solution particulière $G\left(t+\frac{x}{V}\right)$. Pour cela on suppose que les conditions aux frontières sont telles $F\left(t-\frac{x}{V}\right)$ est constamment nulle. On considère à l'instant t_1 un point d'abscisse x_1 . La valeur de la fonction s en ce point et à cet instant est $s\left(x_1,t_1\right)$. On recherche à un instant t_2 postérieur à t_1 $(t_2>t_1)$ la position x_2 d'un point pour lequel la valeur de s est la même que la valeur en x_1 à l'instant t_1. Ce problème est formulé par l'égalité suivante :

$$s\left(x_1,t_1\right)=s\left(x_2,t_2\right) \tag{6.20}$$

Ce qui se traduit par

$$G\left(t_1+\frac{x_1}{V}\right)=G\left(t_2+\frac{x_2}{V}\right) \tag{6.21}$$

Cette équation est satisfaite si

$$t_1+\frac{x_1}{V}=t_2+\frac{x_2}{V} \tag{6.22}$$

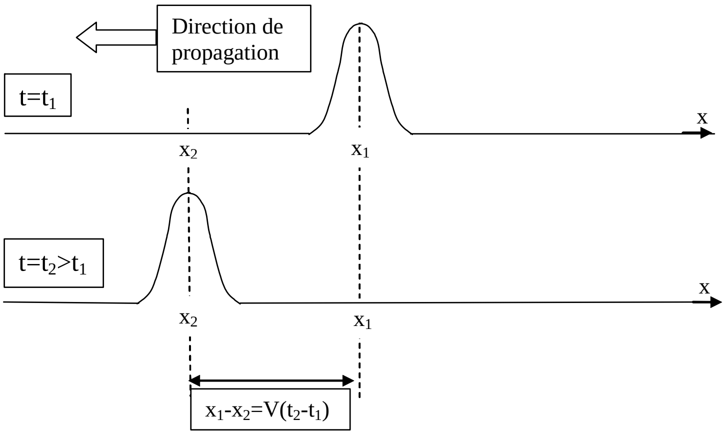
D'où la valeur de x_2 :

$$x_2=x_1-V\left(t_2-t_1\right) \tag{6.23}$$

Comme $t_2>t_1$, x_2 est inférieure à x_1. Ces deux points sont distants de

$$x_1-x_2=V\left(t_2-t_1\right) \tag{6.24}$$

$G\left(t+\frac{x}{V}\right)$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x décroissants (Voir la figure ci-dessous). $G\left(t+\frac{x}{V}\right)$ correspond à une progressive se propageant dans le sens des x décroissant.



6.1.3 Onde progressive sinusoïdale

On considère une onde progressive se propageant dans la direction de l'axe des x, telle que le point d'abscisse $x=0$ est soumis à une vibration sinusoïdale de la forme

$$s\left(x=0,t\right)=S_0\ \cos\left(\omega t\right) \tag{6.25}$$

Le point se trouvant à l'abscisse $x > 0$ aura la même vibration que celle du point $x = 0$ mais avec un retard égal à $\frac{x}{V}$:

$$s\left(x,t\right) = S_0\ \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right] \tag{6.26}$$

Cette expression constitue la définition d'une onde progressive sinusoïdale (ou harmonique) ; elle peut être écrite sous la forme :

$$s\left(x,t\right) = S_0\ \cos\left[\omega t-\phi\left(x\right)\right] \tag{6.27}$$

où $\phi\left(x\right) = \frac{\omega}{V}x$ représente le déphasage lié au temps de propagation $\frac{x}{V}$. On dit que $\phi\left(x\right)$ représente le déphasage dû à la propagation. L'onde progressive sinusoïdale s'écrit sous la forme suivante qui permet de mettre en évidence la double périodicité (dans le temps et dans l'espace) :

$$s\left(x,t\right) = S_0\ \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{6.28}$$

La quantité $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période temporelle tandis que la quantité $\lambda = VT$ est la longueur d'onde qui constitue la période spatiale. On peut vérifier aisément que :

$$\begin{aligned} s\left(x,t+nT\right) &= s\left(x,t\right) && (6.29)\\ s\left(x+n\lambda\right) &= s\left(x,t\right) && (6.30)\end{aligned}$$

où n est un nombre entier.

L'onde progressive s'écrit souvent :

$$s\left(x,t\right) = S_0\ \cos\left[\omega t-kx\right] \tag{6.31}$$

où $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est appelé le module du vecteur d'onde qui s'exprime en m^{-1}.

On utilise très souvent la notation complexe d'une onde progressive sinusoïdale :

$$\begin{aligned} s\left(x,t\right) &= S_0\ e^{i(\omega t-kx)} && (6.32)\\ s\left(x,t\right) &= \underline{S}\ e^{i\omega t} && (6.33)\end{aligned}$$

où $\underline{S} = S_0\ e^{-ikx}$ représente l'amplitude complexe de l'onde progressive sinusoïdale. Le module S_0 de $\underline{S}$ est l'amplitude de l'onde tandis que son argument $-kx$ représente le déphasage dû à la propagation.

6.1.4 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales

Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans le même sens

Considérons deux ondes de même fréquence et de même direction de propagation, d'amplitudes respectives S_1 et S_2, et de phases respectives ϕ_1 et ϕ_2. L'onde résultante sera alors :

$$s\left(x,t\right) = S_1\, e^{j(\omega t-kx+\phi_1)} + S_2\, e^{j(\omega t-kx+\phi_1)} = S\, e^{j(\omega t-kx+\phi)} \tag{6.34}$$

ou encore en notation réelle :

$$s\,(x,t) = S\,\cos\left(\omega t - kx + \phi\right) \tag{6.35}$$

avec

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right)} \tag{6.36}$$

et

$$\phi = Arctg\left(\frac{S_1\,\sin\left(\phi_1\right) + S_2\,\sin\left(\phi_2\right)}{S_1\,\cos\left(\phi_1\right) + S_2\,\cos\left(\phi_2\right)}\right) \tag{6.37}$$

La superposition de deux ondes harmoniques de même fréquence, et qui se propagent dans la même direction, donne une autre onde harmonique progressive de même fréquence, d'amplitude S et de phase ϕ.

Cas de deux ondes de même fréquence se propageant dans des sens opposés

Si par contre, on superpose deux ondes harmoniques de même fréquence mais se propageant dans des sens opposés , le résultat est tout autre. En effet, dans ce cas :

$$s\,(x,t) = S_1\,e^{j(\omega t - kx + \phi_1)} + S_2\,e^{j(\omega t + kx + \phi_1)} = \left[S_1 e^{j\phi_1} e^{-jkx} + S_2 e^{j\phi_2} e^{+jkx}\right]\,e^{j\omega t} \tag{6.38}$$

et on ne plus écrire l'onde résultante sous la forme d'une onde progressive simple. Un cas particulier important se produit quand les deux amplitudes sont identiques. Si on note :

$$S_1 = S_2 = S_0 \tag{6.39}$$

on a :

$$s\,(x,t) = 2S_0\,\cos\left(kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\,e^{j\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)} \tag{6.40}$$

et donc en notation réelle :

$$s\,(x,t) = 2S_0\,\cos\left(kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\,\cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \tag{6.41}$$

Ce mode de vibration est très différent d'une onde progressive puisque tous les points x de la corde vibrent en phase avec des amplitudes différentes. En particulier, il existe une série de points :

$$x_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi}\right]\frac{\lambda}{2} \tag{6.42}$$

avec

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

où l'amplitude de vibration est constamment nulle. On dit dans ce cas que l'onde est stationnaire et que les points x_n sont les nœuds de l'onde. Entre chaque paire de nœuds existe un ventre où l'amplitude de vibration est maximum et égale à $2S_0$. On note aussi que l'intervalle entre deux nœuds est égal à une demi-longueur d'onde $\lambda/2$.

6.1.5 Vitesse de phase

Considérons une onde progressive sinusoidale qui se propage dans le sens des x croissant. Un point d'abscisse x possède, à l'instant t, l'élongation :

$$s(x,t) = S_0 \ \cos(\omega t - kx) \tag{6.43}$$

Entre l'instant t et $t + \Delta t$ l'onde progresse d'une quantité Δx. A l'instant $t + \Delta t$, le point d'abscisse $x + \Delta x$ possède la même élongation que celle que possédait le point d'abscisse x à l'instant antérieur t. Ceci se traduit par l'égalité :

$$s(x,t) = s(x + \Delta x, t + \Delta t) \tag{6.44}$$

$$S_0 \ \cos(\omega t - kx) = S_0 \ \cos[\omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x)] \tag{6.45}$$

Cette égalité est satisfaite si les phases instantanées sont égales :

$$\omega t - kx = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x) \tag{6.46}$$

Soit encore

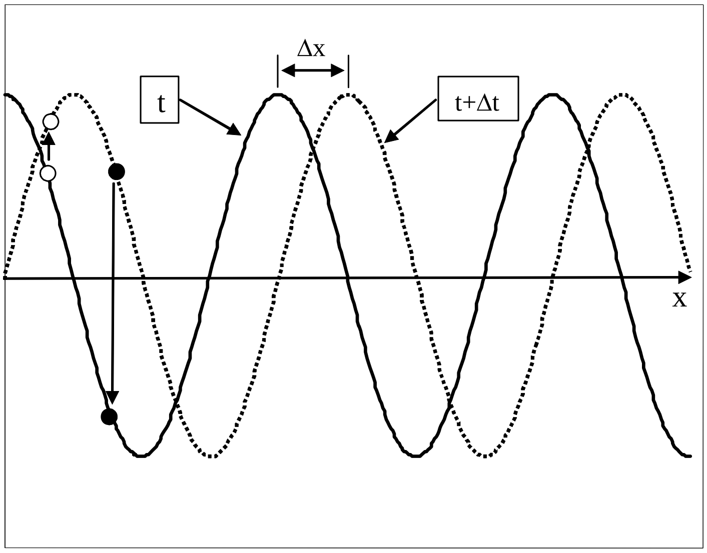
$$\omega \ \Delta t = k \ \Delta x \tag{6.47}$$

On définit la vitesse de phase $V_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ qui s'exprime en fonction de ω et k apr :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \tag{6.48}$$

Si la vitesse de phase ne dépend pas de ω, le milieu est dit non dispersif. Dans le cas contraire il est dit dispersif.

La figure ci-dessous permet d'illustrer la notion de vitesse de phase en considérant deux représentations à des instants différents d'une corde parcourue par une onde . La courbe continue représente l'ensemble des points de la corde à l'instant t. Le point de la corde d'abscisse x est représenté par le point blanc, tandis que le point d'abscisse $x + \Delta x$ est représenté par le point noir. On constate qu'entre les instants t et $t + \Delta t$ chacun de ces point suit une trajectoire rectiligne et le déplacement du point noir à l'instant $t + \Delta t$ est égal au déplacement du point blanc à l'instant t. En particulier la crête de la corde, correspondant à une valeur particulière de la phase instantanée, semble se déplacer dans le sens de propagation de l'onde avec la vitesse de V_ϕ mais la trajectoire de chaque point matériel est une trajectoire rectiligne perpendiculaire à la direction de propagation.



6.1.6 Vitesse de groupe

La vitesse de phase V_ϕ n'est pas nécessairement la vitesse que l'on observe lorsqu'on analyse un mouvement ondulatoire. En général une onde n'est pas parfaitement sinusoïdale mais a une durée limitée et se présente sous la forme d'un train d'onde appelé communément "pulse" ou "groupe" qui se propage avec une vitesse V_G appelée vitesse de groupe. Cette onde sous la forme d'un pulse contient plusieurs fréquences. Si la vitesse de phase est indépendante de la fréquence (Milieu non dispersif) alors toutes les fréquences qui constituent le pulse se propagent à la même vitesse et le pulse se propage avec une vitesse de groupe égale à la vitesse de phase. Mais si le milieu est dispersif (i.e la vitesse de phase dépend de la fréquence), alors le pulse se propage avec une vitesse de groupe différente de la vitesse de phase.

Pour illustrer ce phénomène, considérons une onde constituée de deux ondes de fréquence différente et de même amplitude. En $x = 0$, cette onde s'écrit par exemple sous la forme :

$$s\left(0,t\right) = S_0\ \cos\left(\omega_1 t\right) + S_0\ \cos\left(\omega_2 t\right) \tag{6.49}$$

Cette onde peut s'écrire encore :

$$s\left(0,t\right) = 2S_0\ \cos\left(\omega_B t\right)\ \cos\left(\omega t\right) \tag{6.50}$$

où

$$\omega_B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \text{ et } \omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tag{6.51}$$

Si ω_1 est voisine de ω_2, la vibration résultante se présente sous la forme d'une sinusoïde de pulsation ω dont l'amplitude est modulée par un battement de pulsation ω_B (Modulation d'amplitude).

En un point $x > 0$, l'onde obtenue résulte de la superposition de ces deux ondes qui se sont propagées à des vitesses différentes car le milieu de propagation est supposé dispersif :

$$s\left(x,t\right) = S_0\ \cos\left(\omega_1 t - k_1 x\right) + S_0\ \cos\left(\omega_2 t - k_2 x\right) \tag{6.52}$$

$s\left(x,t\right)$ peut s'écrire :

$$s\left(x,t\right) = 2S_0\ \cos\left(\omega_B t - k_B x\right)\ \cos\left(\omega t - kx\right) \tag{6.53}$$

Dans cette expression :

$$k_B = \frac{k_2 - k_1}{2} \text{ et } k = \frac{k_2 + k_1}{2} \tag{6.54}$$

L'amplitude du battement se propage à une vitesse qui est la vitesse de groupe définie par la relation :

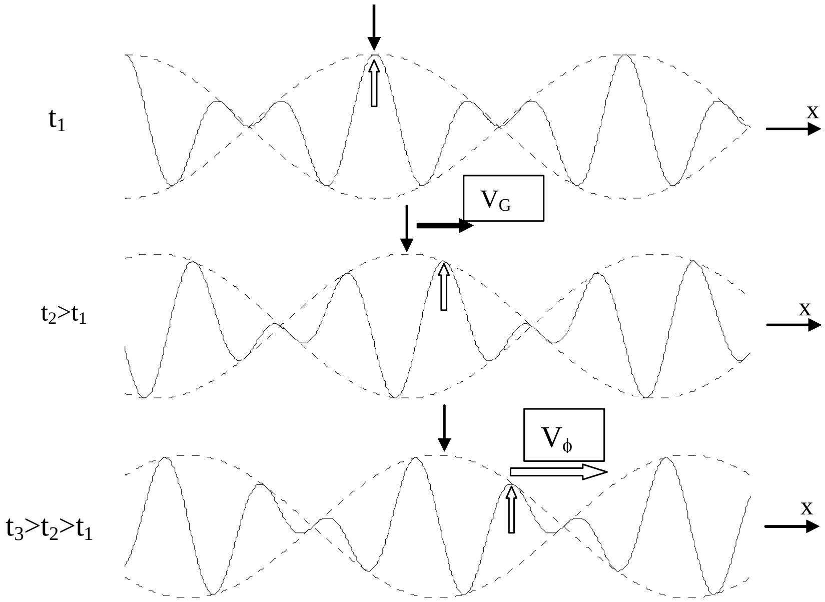
$$V_G = \frac{\omega_B}{k_B} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{d\omega}{dk} \tag{6.55}$$

Comme ω_2 est peu différente de ω_1, la vitesse de groupe est définie par :

$$V_G = \frac{d\omega}{dk} \tag{6.56}$$

Tandis que la sinusoïde contenue à l'intérieur du battement se propage à la vitesse de phase :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \tag{6.57}$$



Les flêches verticales noires correspondent au maximum des battements qui se propagent à la vitesse de groupe. Les flêches verticales blanches correspondent au maximum des vibrations qui se propagent à la vitesse de phase.

6.1.7 Onde Vectorielle

Dans ce qui précède, la quantité $s\,(x,t)$ représente une grandeur scalaire, mais certains phénomènes décrits par des vecteurs conduisent à des équations similaires :

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\,\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{6.58}$$

Le vecteur $\vec{A}$, défini dans un milieu trois dimensions, a trois composantes A_x, A_y, A_z et l'expression ci-dessus signifie que chacune de ces composantes satisfait individuellement l'équation de propagation :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\,\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\,\frac{\partial A_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\,\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \tag{6.59}$$

Chacune de ces composantes A_x, A_y, A_z se propage en $t - \frac{x}{V}$ et $t + \frac{x}{V}$.

6.2 Propagation en trois dimensions

6.2.1 Equation de propagation

Dans un système de coordonnées cartésiennes, l'équation de propagation en trois dimensions s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \tag{6.60}$$

On définit le laplacien scalaire de s par l'expression ci-dessous :

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \tag{6.61}$$

et l'équation des ondes s'écrit sous la forme condensée :

$$\Delta s - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \tag{6.62}$$

s est fonction du temps mais également des cordonnées du point M où la fonction s doit être calculée. Si l'on appelle le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, la quantité s dépend du temps et du vecteur position $\vec{r}$; on écrit $s\,(\vec{r},t)$.

6.2.2 Onde plane progressive sinusoïdale

Définition

L'onde progressive sinusoïdale (ou harmonique), se propageant dans une direction donnée par un vecteur unitaire $\vec{u}$ est définie par :

$$s\,(\vec{r},t) = S_0\ \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) \tag{6.63}$$

où le vecteur $\vec{k} = k\ \vec{u}$ est appelé le vecteur d'onde. Si les composantes du vecteur $\vec{k}$ sont k_x, k_y et k_z, alors l'onde plane est définie par

$$s\,(x, y, z, t) = S_0\ \cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right) \tag{6.64}$$

On peut utiliser la notation complexe pour représenter l'onde plane progressive sinusoïdale qui s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$s\,(\vec{r}, t) = S_0\ e^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \tag{6.65}$$

Relation de dispersion

En remplaçant $s(\vec{r}, t)$ par son expression dans l'équation de propagation, on obtient la relation $k = k\,(\omega)$ pour que l'onde plane définie ci-dessus constitue une solution particulière de l'équation d'onde. Cette relation est appelée la relation de dispersion et elle s'écrit :

$$k = \frac{\omega}{V} \tag{6.66}$$

Surface d'onde

On appelle surface d'onde ou surface équiphase, l'ensemble des points de l'espace pour lesquels, au même instant, $s\,(\vec{r}, t)$ a la m̂eme valeur. Recherchons la surface d'onde passant par un point M_0 à un instant t ; cette surface est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels l'égalité suivante est satisfaite :

$$s\,(\vec{r}, t) = s\,(\vec{r}_0, t) \tag{6.67}$$

Cette égalité se traduit par :

$$S_0\ e^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} = S_0\ e^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}_0\right)} \tag{6.68}$$

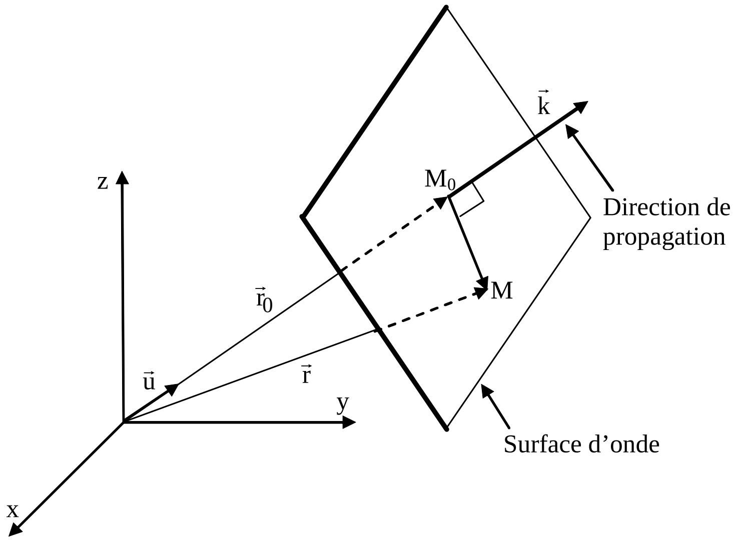
Cette égalité est satisfaite si

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}\cdot\vec{r}_0 \tag{6.69}$$

Tenant compte des propriétés du produit scalaire, on obtient

$$\vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \tag{6.70}$$

La surface d'onde passant, à l'instant t, par le point M_0 est l'ensemble des points M satisfaisant l'équation ci-dessus. Cette surface est un plan passant par M_0, et perpendiculaire à la direction du vecteur d'onde, donc à la direction de propagation. L'onde est dite plane.



Il existe d'autres types d'ondes définis par les surfaces d'onde respectives : par exemple les ondes sphériques pour lesquelles les surfaces d'onde sont des sphères ou les ondes cylindriques pour lesquelles les surfaces d'onde sont des cylindres.

Polarisation

Dans le cas d'une onde plane progressive sinusoïdale représentée par une quantité vectorielle $\vec{A}(\vec{r}, t)$, cette quantité peut avoir différentes orientations par rapport aux surfaces d'ondes :

1. $\vec{A}$ est constamment perpendiculaire à la surface d'onde, ou de manière équivalente parallèle à la direction de propagation : l'onde est dite longitudinale.
2. $\vec{A}$ est contenu dans la surface d'onde, ou de manière équivalente perpendiculaire à la direction de propagation : l'onde est dite transversale. Dans ce cas, l'extrêmité du champ vectoriel $\vec{A}$ peut décrire une trajectoire rectiligne : l'onde transversale est dite à polarisation rectiligne. Elle peut décrire une trajectoire circulaire (onde transversale à polarisation circulaire), ou une trajectoire elliptique (onde transversale à polarisation elliptique).

Chapitre 7

Cordes vibrantes

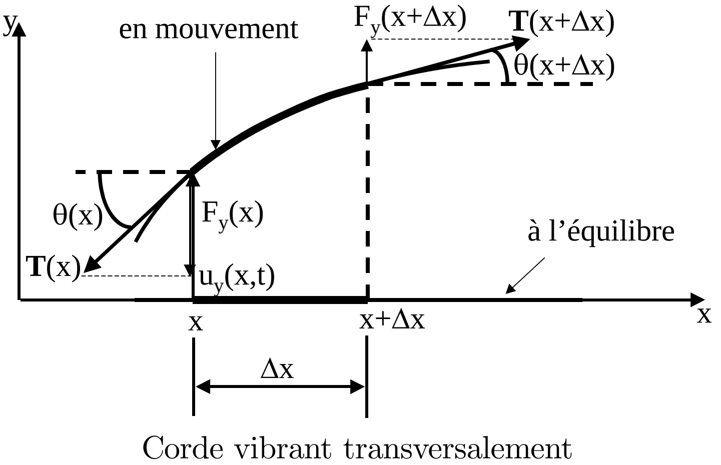
7.1 Equation des ondes

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée x, et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cet ébranlement se produise suivant l'axe 0y.

Etudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par T la tension à laquelle est soumise la corde. On considère en un point d'abscisse x un segment très court de cette corde, de longueur Δx. La masse Δm du segment est donnée par :

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

où μ est la densité linéique de masse de la corde, c'est-à-dire la masse par unité de longueur qui s'exprime en kg/m.


y
en mouvement
$F_y(x+\Delta x)$
$\mathbf{T}(x+\Delta x)$
$\theta(x+\Delta x)$
$\theta(x)$
$F_y(x)$
à l'équilibre
$\mathbf{T}(x)$
$u_y(x,t)$
x
x+Δx
x
Δx

Corde vibrant transversalement

Dans une situation hors équilibre, le segment n'est plus droit, il présente une courbure. Nous considérons des mouvements d'oscillation de la corde de petite amplitude

$$\vec{u}\,(x,t) = u\,(x,t)\,\vec{e}_y$$

si bien que nous pouvons faire l'approximation :

$$\sin(\theta)|_x = \tan(\theta)|_x = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$$

$$\sin(\theta)|_{x+\Delta x} = \tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

Cette approximation néglige aussi l'allongement du segment, et considère donc la tension T comme constante. La force appliquée sur le segment dans la direction y est la résultante de la force appliquée au point x, qui est une force appliquée vers le bas et égale en module à

$$F\,(x,t) = T\,\sin(\theta)|_x \cong T\,\tan(\theta)|_x = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$$

et de la force appliquée au point x+Δx qui est vers le haut et égale à

$$F\,(x+\Delta x,t) = T\,\sin(\theta)|_{x+\Delta x} \cong T\,\tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

La force totale dans la direction y est donc :

$$R = F\,(x+\Delta x,t) - F\,(x,t) = T\,\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right] = T\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\Delta x$$

Nous pouvons appliquer maintenant la loi fondamentale de la dynamique au segment Δx. La force dans la direction y doit être égale au produit de la masse Δm du segment par l'accélération de celui-ci. Donc :

$$R = \Delta m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si on définit $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ qui a la dimension d'une vitesse, on constate que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

qui est l'équation d'ondes de la corde. V qui est la vitesse de propagation de cette onde.

7.2 Ondes progressives harmoniques

7.2.1 Définition

Une onde progressive harmonique se propageant selon Ox est définie par :

$$u\left(x,t\right)=U_0\,\cos\left(\omega t-kx\right)$$

ou encore en notation complexe

$$u\left(x,t\right)=U_0\,e^{j(\omega t-kx)}$$

où $k=\frac{\omega}{V}=\frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde, λ étant la longueur d 'onde.

7.2.2 Force en un point

On appelle force en un point, la projection selon Oy de la force exercée, en ce point, par la partie gauche de la corde sur la partie droite :

$$F=-T\frac{\partial u}{\partial x}$$

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, cette relation devient :

$$F(x,t)=jkT\;\;U_0\;e^{j(\omega t-kx)}$$

La vitesse de particules s'écrit :

$$\dot{u}\left(x,t\right)=\frac{\partial u}{\partial t}=j\omega\;U_0\;\;e^{j(\omega t-kx)}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules $\dot{u}$ est en phase avec la force F.

7.2.3 Impédance

On appelle impédance en un point le rapport de l'amplitude complexe de la force à l'ampliude complexe de la vitesse de particule

$$Z\left(x\right)=\frac{F_y}{\dot{u}_y}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z\left(x\right)=\mu V=\sqrt{\mu T}$$

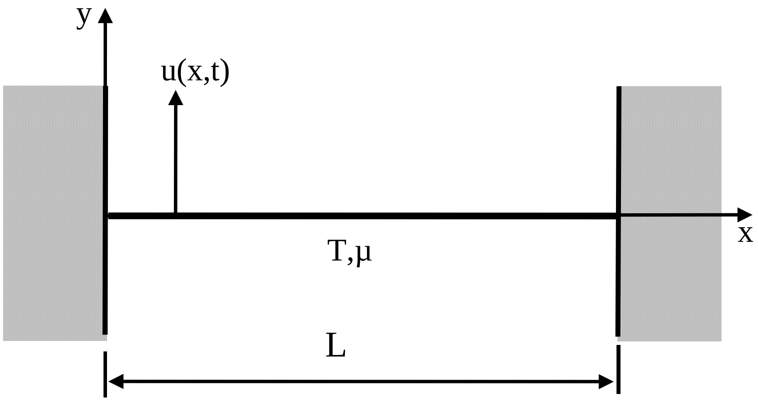
La quantité $\sqrt{\mu T}$ définit l'impédance caractéristique de la corde

$$Z_c=\sqrt{\mu T}=\mu V$$

On obtient une propriété de l'onde progressive plane

$$Z(x) = Z_c \quad \forall x$$

7.3 Oscillations libres d'une corde de longueur finie



Corde de longueur L fixée aux extrémités

Considérons une corde de longueur L fixe aux points $x = 0$ et $x = L$. Recherchons une solution de l'équation d'onde sous la forme :

$$u(x,t) = g(x)\, f(t)$$

En remplaçant dans l'équation de propagation, on obtient :

$$\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{V^2}\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dt^2}$$

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que de x, tandis que le membre de gauche ne dépend que de t. Ces deux expressions sont donc égales à une constante qui doit être un nombre réel négatif que nous posons égal à $-k^2$ car la solution ne doit pas tendre vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Posons $\omega = k\,V$. On en déduit que :

$$\begin{array}{l} \frac{d^2 g}{dx^2} = -k^2 g \\ \frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f \end{array}$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont de la forme :

$$\begin{array}{l} f = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t) \\ g = C\,\cos(kx) + D \sin(kx) \end{array}$$

La solution de l'équation d'onde peut alors s'écrire sous la forme :

$$u\left(x,t\right)=\left[A\,\cos\left(\omega t\right)+B\,\sin\left(\omega t\right)\right]\,\left[C\,\cos\left(kx\right)+D\,\sin\left(kx\right)\right]$$

Tenant compte des conditions aux limites

$$\begin{array}{c} u\left(0,t\right)=0 \\ u\left(L,t\right)=0 \end{array}$$

on obtient

$$\begin{array}{l} C=0 \\ k=n\frac{\pi}{L} \quad o \quad n=0,\,1,\,2,\,......... \end{array}$$

La solution de l'équation d'onde qui satisfait ces conditions aux limites est donc une somme d'une infinités de termes :

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\omega_n t\right)+b_n\,\sin\left(\omega_n t\right)\right]\,\sin\left(k_n x\right)$$

avec

$$k_n=n\frac{\pi}{L}\quad et\quad \omega_n=k_nV=n\frac{\pi V}{L}$$

Les ω_n sont les pulsations propres. Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par les conditions initiales du mouvement. Supposons qu'à $t=0$ nous imposions à la corde une certaine forme initiale $u(x,0)=u_0(x)$ et une vitesse initiale

$$\dot{u}\left(0,t\right)=v_0\left(t\right)$$

Dans ce cas nous aurons les conditions initiales suivantes :

$$\begin{array}{l} u_0\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,\sin\left(k_n x\right) \\ v_0\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}-\omega_n b_n\sin\left(k_n x\right) \end{array}$$

On doit inverser ces équations pour obtenir les coefficients a_n et b_n. La méthode de Fourier consiste à les multiplier par $\sin\left(k_m x\right)$ et les intégrer entre 0 et L. Si on utilise les intégrales :

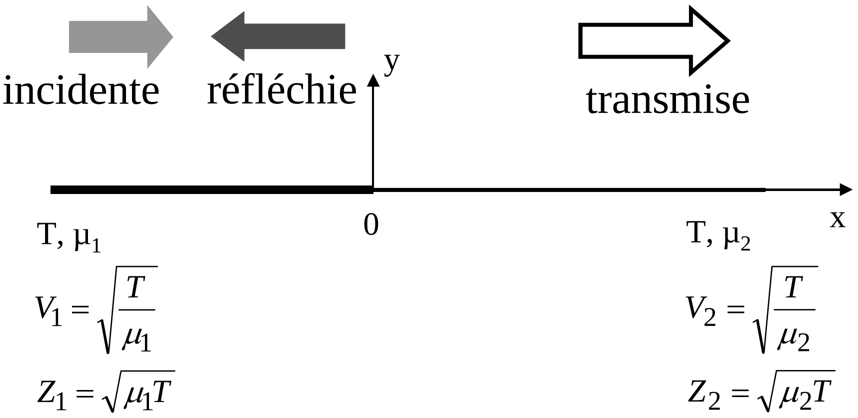
$$\int_0^L\sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right)\,\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\,dx=\left\{\begin{array}{lll} 0 & si & m\neq n \\ \frac{L}{2} & si & m=n \end{array}\right.$$

on obtient

$$\begin{array}{l} a_n=\frac{2}{L}\int_0^L u_0\left(x\right)\,\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\,dx \\ b_n=-\frac{2}{\omega_n L}\int_0^L v_0\left(x\right)\,\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx \end{array}$$

7.4 Réflexion et transmission

7.4.1 Réflexion et transmission entre deux cordes semi-infinies


incidente
réfléchie
y
transmise
0
x
T, μ1
T, μ2
$V_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$
$V_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$
$Z_1 = \sqrt{\mu_1 T}$
$Z_2 = \sqrt{\mu_2 T}$

Réflexion transmission dans deux cordes semi-infinies

Soit deux cordes de longueur semi-infinie, reliées en $x = 0$. Leurs masses linéiques sont respectivement μ_1 et μ_2. Lorsqu'une onde venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$ dans la première corde, elle donne naissance au point de jonction, $x = 0$, à une onde réfléchie et une onde transmise. L'écriture de la continuité du déplacement et de la force en $x = 0$ permet d'obtenir le coefficient de réflexion R_u et le coefficient de transmission T_u définis respectivement par :

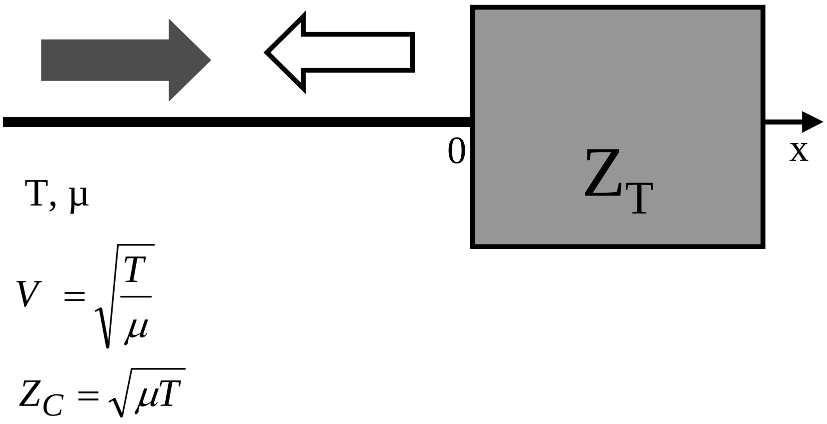
$$R_u = \frac{U_R}{U_i}$$
$$T_u = \frac{U_T}{U_i}$$

où U_i , U_R et U_T sont les amplitudes des déplacements associés respectivement à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. On en déduit :

$$R_u = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_u = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

7.4.2 Réflexion sur une impédance quelconque



Corde semi-infinie terminée par une impédance Z_T

Soit une corde de longueur semi-infinie, de masse linéique μ, tendue horizontalement avec une tension T et terminée en $x = 0$ par une impédance mécanique Z_T. Lorsqu'une onde harmonique se propage dans la corde de $-\infty$ vers $x = 0$, elle subit une réflexion en ce point. Sachant que le déplacement de particules s'écrit :

$$u\,(x,t) = U_i\,e^{j(\omega t - kx)} + U_R\,e^{j(\omega t + kx)}$$

on en déduit la vitesse de particules et la force en un point d'abscisse x

$$\begin{array}{l} \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = j\omega\left[U_i\,e^{j(\omega t - kx)} + U_R\,e^{j(\omega t + kx)}\right] \\ F = -T\frac{\partial u}{\partial x} = -jkT\left[U_i\,e^{j(\omega t - kx)} - U_R\,e^{j(\omega t + kx)}\right] \end{array}$$

En $x = 0$, les conditions aux limites s'écrivent : $\quad Z_T = \dfrac{F(0,t)}{\dot{u}(0,t)}$

On en déduit le coefficient de réflexion R_u en fonction de l'impédance caractéristique Z_c et de l'impédance Z_T placée à l'extrémité de la corde :

$$R_u = \frac{U_R}{U_i} = \frac{Z_c - Z_T}{Z_c + Z_T}$$

Chapitre 8

Ondes acoustiques dans les fluides

8.1 Introduction

Les ondes acoustiques sont des ondes élastiques qui se propagent dans les fluides (gaz ou liquides). Il est donc possible d'obtenir l'équation d'onde qui régit la propagation des ondes planes dans un fluide par la même démarche que celle que nous avons utilisée pour établir l'équation de propagation des ondes transversales dans une corde.

Dans la suite, nous utiliserons les symboles suivants pour étudier l'onde acoustique qui se propage suivant l'axe des x :

x : coordonnée à l'équilibre d'une particule du milieu.

u_x : composante suivant l'axe des x du déplacement de particule par rapport à la position d'équilibre.

ρ_0 : masse volumique du fluide à l'équilibre

P : pression instantanée en un point quelconque

P_0 : pression à l'équilibre

$p = P - P_0$: surpression ou pression acoustique

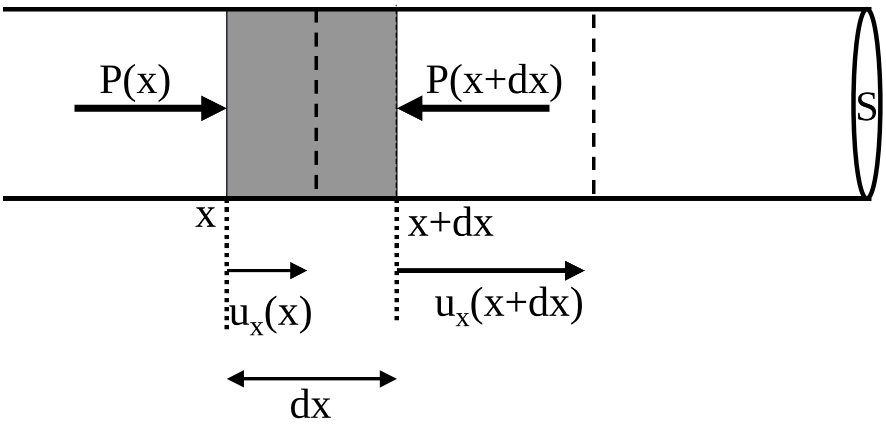
c : vitesse de propagation de l'onde

On entend par particule, un élément de volume contenant des millions de molécules de telle sorte qu'il puisse être considéré comme continu, mais toutefois suffisamment petit pour que les grandeurs acoustiques comme la pression, la masse volumique et la vitesse de particule puissent être considérées comme constantes dans cet élément de volume. Dans ce qui suit, nous négligerons les effets de la gravitation de telle sorte que P_0 et ρ_0 sont uniformes dans tout le milieu. On suppose d'autre part que le milieu est homogène, isotrope et parfaitement élastique, c'est-à-dire non dissipatif.

8.2 Equation d'onde

Considérons le cas d'une onde plane émise dans un fluide par une membrane vibrante plane. Lorsque celle-ci est au repos, la pression dans le fluide est uniforme et égale à P_0. En se déplaçant, par exemple dans le sens des x positifs, la membrane comprime la couche de fluide adjacente.

Cette situation est instable : le fluide se détend en comprimant à son tout la tranche voisine. L'onde progresse ainsi de proche en proche par une succession de compressions et de détentes.



Propagation acoustique d'une onde acoustique

Soit une tranche de fluide de petite épaisseur Δx située à l'abscisse x. Lorsque la perturbation atteint ce point, les forces agissant sur cette tranche ne s'équilibrent plus et elle se met en mouvement. Soit $u_x(x,t)$ le déplacement à l'instant t du plan d'abscisse x. Soit $F_x(x,t)$ et $F_x(x+\Delta x,t)$ les forces agissant sur la tranche de fluide respectivement en x et $x+\Delta x$. Ces forces s'expriment par :

$$\begin{aligned} F_x(x,t) &= S\,P(x,t) \\ F_x(x+\Delta x,t) &= -S\,P(x+\Delta x,t) \end{aligned}$$

La résultante de ces deux forces est :

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= F_x(x,t) + F_x(x+\Delta x,t) \\ \Delta F_x &= -S\left[P(x+\Delta x,t) - P(x,t)\right] \end{aligned}$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $P(x,t)$, on obtient :

$$P(x+\Delta x,t) = P(x,t) + \frac{\partial P}{\partial x}\,\Delta x$$

D'où :

$$\Delta F_x = -S\,\frac{\partial P}{\partial x}$$

Comme $P = P_0 + p$, la force résultant s'exprime par :

$$\Delta F_x = -S\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\Delta x$$

Sous l'action de cette force, la tranche de fluide subit une accélération et en écrivant la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\Delta m \, \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -S \, \frac{\partial p}{\partial x} \, \Delta x$$

Le fluide étant compressible, le déplacement du plan d'abscisse $x + \Delta x$ est différent du déplacement du plan d'abscisse x et il vaut $u_x\,(x + \Delta x, t)$. De nouveau un développement en série de Taylor au premier ordre permet d'écrire :

$$u_x\,(x + \Delta x, t) = u_x(x, t) + \frac{\partial u_x}{\partial x} \, \Delta x$$

Pour prendre en compte la compressibilité du fluide, calculons la dilatation volumique subies par la tranche de fluide . Soit $\Delta v_0 = S\,\Delta x$, le volume à l'équilibre et soit Δv, le volume en cours de mouvement, avec :

$$\begin{aligned}
\Delta v &= S\,[x + \Delta x + u_x\,(x + \Delta x) - x - u_x\,(x)] \\
\Delta v &= S\,[\Delta x + u_x\,(x + \Delta x) - u_x\,(x)] \\
\Delta v &= S\,\left[\Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial x}\,\Delta x\right] \\
\Delta v &= \Delta v_0 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta v_0
\end{aligned}$$

On en déduit la dilatation volumique

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\Delta v - \Delta v_0}{\Delta v_0} \\
\theta &= \frac{\partial u_x}{\partial u}
\end{aligned}$$

Rappelons que pour un fluide compressible, la surpression p est reliée à la dilatation volumique θ par la relation

$$p = -\kappa\,\theta$$

où κ est le module de compressibilité. On obtient ainsi :

$$p = -\kappa \, \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Remarque : On utilise souvent le *coefficient de compressibilité* $\chi = \dfrac{1}{\kappa}$.

Les deux équations

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ p &= -\kappa \frac{\partial u_x}{\partial x}\end{aligned}$$

constituent les deux équations fondamentales de l'acoustique.

En remplaçant dans la première équation p par son expression tirée de la seconde équation on obtient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

où V représente la vitesse de propagation définie par

$$V = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$$

8.3 Vitesse du son

Le phénomène de propagation étant un processus adiabatique, la relation liant la pression et le volume est

$$P v^\gamma = cons\tan te$$

En calculant la différentielle, on obtient :

$$v^\gamma \, dP + P\, v^{\gamma-1}\, dv = 0$$

Si l'on considère que dP représente la varaiation de pression au voisinage de la pression à l'équilibre P_0, on obtient :

$$v_0^\gamma \, p + \gamma P_0 \, v_0^{\gamma-1}\, \Delta v = 0$$

d'où :

$$p = -\gamma P_0 \frac{\Delta v}{v_0}$$

En tenant compte de la définition du module de compressibilité, on obtient :

$$\kappa = \frac{1}{\chi} = \gamma P_0$$

D'où la vitesse du son dans un fluide :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

Exemple : Dans l'air, dans les conditions normales $T = 20°C$ et $P_0 = 10^5 N \cdot m^{-2}$, $\gamma = 1.4$ et $\rho_0 = 1.29\, kg \cdot m^{-3}$, on en déduit $V \simeq 330 \ m \cdot s^{-1}$

La valeur de la pression à l'équilibre dépend fortement de la température. Pour une mole de gaz parfait, on a :

$$P_0 v_0 = RT$$

d'où

$$P_0 = \frac{RT}{v_0}$$

et

$$V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\rho_0 v_0}}$$

Le produit $\rho_0 v_0$ représente la masse molaire M du gaz ; d'où :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Dans un gaz parfait, la vitesse de propagation du son est proportionnelle à la racine carrée de la température mesurée en $^\circ K$.

8.4 Onde progressive sinusoïdale

8.4.1 Définition

Une onde acoustique sinusoïdale, s'écrit :

$$p\,(x,t) = p_0\,\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right]$$

On définit le module du vecteur d'onde k par

$$k = \frac{\omega}{V}$$

d'où

$$p\,(x,t) = p_0\,\cos\left(\omega t - kx\right)$$

En notation complexe, l'onde progressive sinusoïdale s'écrit

$$p\,(x,t) = p_0\,e^{j(\omega t - kx)}$$

La relation liant la pression acoustique et la compressibilité, à savoir

$$p = -\kappa\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -\frac{1}{\kappa}\int p\,(x,t)\,dx \\
u\,(x,t) &= -\frac{1}{\kappa}\int p_0\,e^{j(\omega t-kx)}dx \\
u\,(x,t) &= \frac{p_0}{jk\kappa}e^{j(\omega t-kx)} \\
u\,(x,t) &= \frac{p_0}{j\omega\rho_0 V}e^{j(\omega t-kx)}
\end{aligned}$$

La dérivation de cette dernière expression par rapport au temps permet d'obtenir la vitesse de particules :

$$\dot{u}\,(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 V}\,p_0\,e^{j(\omega t-kx)}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules est en phase avec la pression acoustique.

8.4.2 Impédance acoustique

On appelle impédance acoustique en un point le rapport de l'amplitude complexe de la pression à l'ampliude complexe de la vitesse de particule

$$Z\,(x) = \frac{p}{\dot{u}}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z\,(x) = \rho_0 V$$

Le produit $\rho_0 V$ définit l'impédance acoustique caractéristique du fluide

$$Z_c = \rho_0 V$$

On obtient une propriété de l'onde plane progressive :

$$Z\,(x) = Z_c\,\forall x$$

8.4.3 Energie acoustique

Densité d'énergie cinétique

Soit un petit élément de volume v_0 dont le dépélacement est $u\,(x,t)$ et dont la vitesse est $\dot{u}\,(x,t)$; il possède une énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}\rho_0 v_0 \dot{u}^2$$

On définit l'énergie cinétique par unité de volume ou densité d'énergie cinétique

$$\mathcal{E}_c = \frac{E_c}{v_0} = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{u}^2$$

Densité d'énergie potentielle

Soit un petit élément de volume v_0. Sous l'action de la surpression p, cet élément se comprime ou se dilate en raison de la compressibilité du fluide. L'énergie potentielle emmagasinée est égale au travail fourni par la pression pour comprimer ou dilater le volume v_0 :

$$E_p = \int -p dv$$

Sachant que

$$p = -\kappa \frac{v - v_0}{v_0}$$

on en déduit que :

$$dv = -\frac{1}{\kappa} v_0 \, dp$$

d'où :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{v_0}{\kappa} \int_0^p p \, dp \\ Ep &= \frac{v_0}{2\kappa} p^2 \end{aligned}$$

On en déduit la densité d'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = \frac{E_p}{v_0} = \frac{1}{2\kappa} p^2$$

Densité d'énergie

La densité d'énergie est égale à la somme de la densité d'énergie cinétique et de la densité d'énergie potentielle

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2}\rho_0 \, \dot{u}^2 + \frac{1}{2\kappa} p^2 \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'une onde plane progressive sinusoïdale,

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_p = \frac{1}{2\rho_0 V^2} p_0 \, \cos^2(\omega t - kx)$$

et

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\rho_0 V^2}\, p_0 \,\cos^2(\omega t - kx)$$

On définit la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie comme

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathcal{E}\, dt$$

où $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

On définit également la moyenne spatiale de la densité d'énergie :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} \mathcal{E}\, dx$$

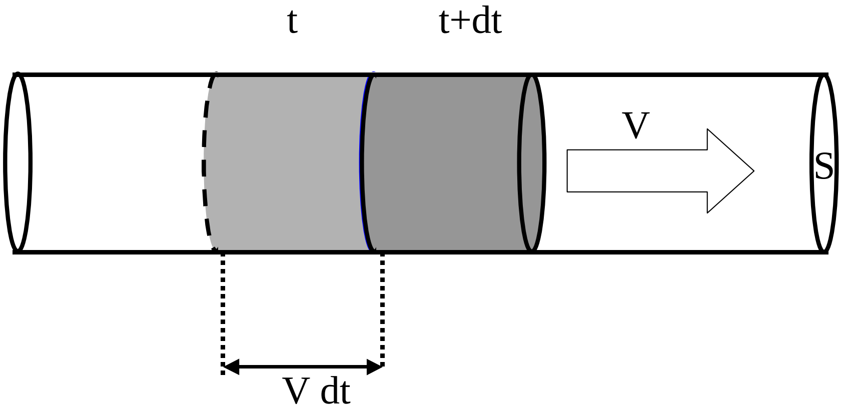
Dans le cas d'une onde progressive, ces deux valeurs sont égales et valent :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{p_0^2}{2\rho_0 V^2}$$

Intensité

On appelle intensité de l'onde acoustique la puissance qui traverse, par unité de temps une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation.

Pour calculer l'intensité de l'onde calculons l'énergie qui traverse pendant un intervalle de temps une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.



Flux de puissance

Cette énergie dE est égale à l'énergie contenue dans un volume $S\,V\,dt$ et elle égale à

$$dE = \mathcal{E}\, S\, V\, dt$$

D'où la puissance $\mathcal{P}$ traversant cette surface

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \mathcal{E}\, S\, V$$

On en déduit l'expression de l'intensité de l'onde acoustique

$$\begin{aligned} I\left(t\right) &= \frac{1}{S} P \\ I\left(t\right) &= \mathcal{E}\ V \\ I\left(t\right) &= \frac{p_0^2}{\rho_0 V}\cos^2\left(\omega t - kx\right) \end{aligned}$$

On appelle intensité de l'onde acoustique la valeur moyenne

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} I\left(t\right) dt \\ I &= \frac{p_0^2}{2\rho_0 V} \\ I &= \frac{p_0^2}{2Z_c} \end{aligned}$$

Niveau sonore

On définit le niveau sonore en décibels par

$$N_{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

I_0 est une intensité de référence correspondant à $I_0 = 10^{-12}\, W \cdot m^{-2}$.

Exemple : Pour une fréquence $f = 1\text{kHz}$, le seuil d'audition est égal à 0 dB et le seuil de douleur est égal à 130 dB. Pour calculer l'intensité, l'amplitude de pression p_0 la vitesse de particules et le déplacement de particules, dans le cas où $V = 330\ m/s$ et $Z_c = 411$ rayleighs, on peut utiliser les relations suivantes :

$I = I_0 10^{0.1\, N_{dB}}$

$p_0 = \sqrt{2Z_c I}$

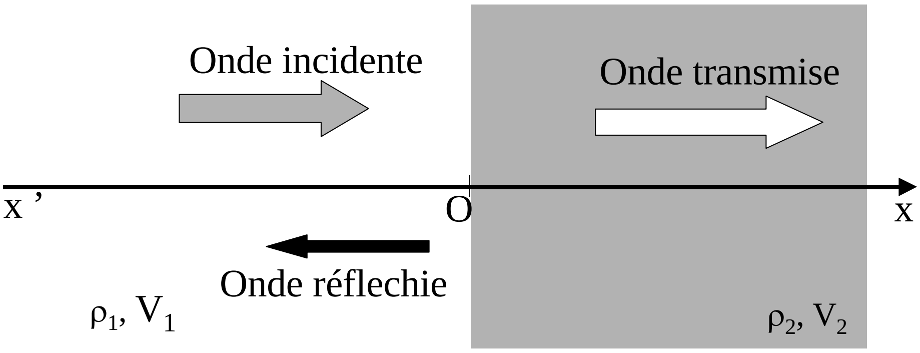
$\dot{u} = \dfrac{p_0}{Z_c}$

$u = \dfrac{\dot{u}}{2\pi f}$

Pour chacun de ces deux cas, on obtient :

N_{dB}	$I\,(W/m^2)$	$p_0\,(Pa)$	$\dot{u}\,(m/s)$	$u\,(m)$
0 dB	10^{-12}	2.9×10^{-5}	7×10^{-8}	1.1×10^{-11}
130 dB	10.0	91	0.22	3.5×10^{-5}

8.5 Reflexion-Transmission



Réflexion à un interface fluide-fluide

Soit deux milieux fluides semi-infinis séparés par un surface plane. Choisissons un repère orthonormé de telle sorte que le plan yOz coïncide avec la surface de séparation. Lorsque une onde acoustique provenant de $-\infty$, se propageant dans le premier dans la direction de l'axe des x arrive à la surface de séparation, elle donne naissance à deux ondes

- une onde réfléchie qui se propage dans le premier milieu dans le sens des x décroissant.
- une onde transmise qui se propage dans le second milieu dans le sens des x croissant.

L'onde résultante dans le premier milieu ($x \leq 0$) est caractérisée par :

$$\begin{aligned}
p_1(x,t) &= p_i(x,t) + p_R(x,t) \\
p_1(x,t) &= P_i\, e^{j(\omega t - k_1 x)} + P_R\, e^{j(\omega t + k_1 x)} \\
\dot{u}_1(x,t) &= \frac{1}{Z_1}\left[P_i\, e^{j(\omega t - k_1 x)} - P_R\, e^{j(\omega t + k_1 x)}\right]
\end{aligned}$$

Dans le deuxième milieu, on a

$$\begin{aligned}
p_2(x,t) &= p_T(x,t) \\
p_2(x,t) &= P_T\, e^{j(\omega t - k_2 x)} \\
\dot{u}_2(x,t) &= \frac{1}{Z_2} P_T\, e^{j(\omega t - k_2 x)}
\end{aligned}$$

Les relations de continuité à l'interface s'écrivent

$$\begin{cases} p_1(0,t) = p_2(0,t) \\ \dot{u}_1(0,t) = \dot{u}_2(0,t) \end{cases}$$

On en déduit

$$\left\{ \begin{array}{c} P_i + P_R = P_T \\ \dfrac{1}{Z_1}\left(P_i - P_R\right) = \dfrac{1}{Z_2} P_T \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 + \dfrac{P_R}{P_i} = \dfrac{P_T}{P_i} \\ 1 - \dfrac{P_R}{P_i} = \dfrac{Z_1}{Z_2}\dfrac{P_T}{P_I} \end{array} \right.$$

On définit

- le coefficient de reflexion pour la pression

$$R_P = \frac{P_R}{P_i}$$

- le coefficient de transmission pour la pression

$$T_P = \frac{P_T}{P_i}$$

Les deux relations de continuité s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 + R_P = T_P \\ 1 - R_P = \frac{Z_1}{Z_2} T_P \end{array} \right.$$

On en déduit les coefficients de reflexion et de transmission

$$\begin{aligned} R_P &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \\ T_P &= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \end{aligned}$$

En tenant compte des relations $p_i = Z_1\,\dot{u}_i$, $p_R = -Z_1\,\dot{u}_R$ et $p_T = Z_2\,\dot{u}_T$, on peut calculer les coefficients de reflexion etde transmission pour la vitesse de particules et pour le déplacement de particules :

$$\begin{aligned} R_{\dot{U}} &= R_U = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ T_{\dot{U}} &= T_U = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{aligned}$$

En tenant compte des relations $I_i = P_i^2/2Z_1$, $I_R = P_R^2/2Z_1$ et $I_T = P_T^2/2Z_2$, on peut calculer les coefficients de reflexion et de transmission pour l'intensité acoustique :

$$\begin{aligned}
\alpha_R &= \frac{I_R}{I_i} = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right]^2 \\
\alpha_T &= \frac{I_T}{I_i} = \frac{4Z_1Z_2}{\left[Z_1 + Z_2\right]^2}
\end{aligned}$$

Chapitre 9

Propagation d'une onde électrique dans une ligne coaxiale

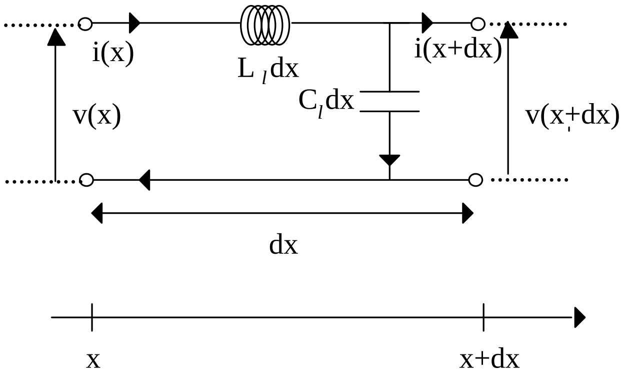
9.1 Introduction

Lors de l'étude des circuits électriques, en régime sinusoïdal forcé, on considère habituellement que dans une branche quelconque du circuit, le courant électrique est le même en tout point et ne dépend que du temps. Cette hypothèse n'est valable que si la longueur d'onde associée au courant sinusoïdal est grande devant les dimensions du circuit ; par exemple pour une fréquence $f = 50Hz$,la longueur d'onde correspondante est $\lambda = c/f \approx 6000km$, où c est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ($c = 3 \times 10^8\ m \cdot s^{-1}$). Cette hypothèse revient de façon équivalente à négliger le temps de propagation de l'onde électromagnétique (propagation de vitesse infinie).

Si λ est du même ordre de grandeur des dimensions du circuit, cette approximation n'est plus valable ; par exemple si $f \approx GHz$, $\lambda \approx 30cm$ qui est alors comparable aux dimensions des circuits ou des fils couramment utilisés dans les réseaux électriques à l'échelle du laboratoire. Dans ce cas, il faut tenir compte de la vitesse finie des ondes électromagnétiques.

9.2 Equation de propagation

Un câble possède une capacité par unité de longueur C_l et une autoinductance par unité de longueur L_l . Nous supposons que ce câble, que nous appelons ligne, est rectiligne et que la position de chaque point est repérée par son abscisse x. Soit un élément de câble situé en x et de faible longueur dx. Il possède une capacité $C_l\ dx$ et une inductance $L_l\ dx$. Cet élément de câble est représenté, à un instant t, par le schéma ci-dessous.



cellule élémentaire

1. L'écriture des lois de Kirchhoff permet d'établir les relations suivantes :

$$\frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial x}=-L_l\frac{\partial i\left(x,t\right)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i\left(x,t\right)}{\partial x}=-C_l\frac{\partial v\left(x,t\right)}{\partial t}$$

A partir de ces deux relations, on peut établir les équations de propagation de la tension v et du courant i :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{V^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}-\frac{1}{V^2}\,\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0$$

Dans ces deux équations, $V=\dfrac{1}{\sqrt{L_lC_l}}$ est la vitesse de propagation de l'onde électrique dans le câble .

9.3 Solution de l'équation de propagation

On peut vérifier que les fonctions $f\left(t-\frac{x}{V}\right)$ et $g\left(t-\frac{x}{V}\right)$ sont deux solutions de l'équation de propagation. La solution de l'équation de propagation s'écrira donc généralement sous la forme :

$$v\left(x,t\right)=f\left(t-\frac{x}{V}\right)+g\left(t+\frac{x}{V}\right)$$

La fonction $f\left(t-\frac{x}{V}\right)$ correspond à une onde progressive se propageant dans le sens des x croissant tandis que $g\left(t+\frac{x}{V}\right)$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x décroissant.

9.4 Onde Progressive sinusoïdale

9.4.1 Définition

Lorsque $g\left(t+\frac{x}{V}\right)\equiv 0$, la tension électrique en un point d'abscisse x est donnée par :

$$v\left(x,t\right)=f\left(t-\frac{x}{V}\right)$$

Dans ce cas, on dit qu'un onde progressive se propage dans le câble.

Lorsque la fonction $f\left(t-\frac{x}{V}\right)$ est une fonction sinuoïdale, l'onde progressive est dite sinusoïdale ou harmonique :

$$v\left(x,t\right)=\ v_0\ \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right]$$

On peut encore écrire

$$v\left(x,t\right)=v_0\ \cos\left[\omega t-kx\right]$$

où $k=\frac{\omega}{V}$ (Relation de dispersion).

En utilisant la notation complexe :

$$v\left(x,t\right)=\mathrm{Re}\left[v_0\ e^{j[\omega t-kx]}\right]=\mathrm{Re}\left[\overline{v}\ e^{j\omega t}\right]$$

où l'amplitude complexe est définie par :

$$\overline{v}=v_0\ e^{-jkx}$$

De même , on peut obtenir l'expression de l'intensité en fonction du temps t et de la position x :

$$i\left(x,t\right)=i_0\cos\left(\omega t-kx\right)$$

$$i\left(x,t\right)=\mathrm{Re}\left[\overline{i}\ e^{j\omega t}\right]$$

où l'amplitude complexe du courant est définie par la relation :

$$\overline{i}=i_0\ e^{-jkx}$$

avec $i_0=\frac{v_0}{\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}}$.

9.4.2 Impédance en un point

L'impédance en un point est définie par le rapport :

$$\overline{Z}\left(x\right)=\frac{\overline{v}}{\overline{i}}$$

Dans le cas d'une onde progressive, l'impédance est un nombre réel égal à

$$Z_c=\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$$

et ne dépend pas de x. Cette impédance est appelée impédance caractéristique ou impédance itérative du câble.

Chapitre 10

Eléments d'analyse vectorielle

10.1 Champ scalaire - Champ vectoriel

Soit un trièdre orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) :

$$\overrightarrow{OM} = x\ \vec{e}_x + y\ \vec{e}_y + z\ \vec{e}_z$$

La fonction $f(M)$ est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :

$$f(M) = f(x, y, z)$$

Le vecteur $\vec{v}(M)$ est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{v}(M) = V_x(x, y, z)\ \ \vec{e}_x + V_y(x, y, z)\ \ \vec{e}_y + V_z(x, y, z)\ \ \vec{e}_z$$

10.2 Gradient d'un champ scalaire

Le gradient (noté $\overrightarrow{grad}$) est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour composantes suivant $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, et $\vec{e}_z$ les dérivées partielles de $f(M)$ par rapport à x, y et z respectivement :

$$\overrightarrow{grad}\ (f) = \frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\ \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\ \vec{e}_z$$

10.3 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence (notée *div*) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle $\vec{v}(M)$ de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div\,(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

10.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel noté ($\overrightarrow{rot}$) d'un champ vectoriel donne une fonction vectorielle de point définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{rot}\,(\vec{v}) = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\ \vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\ \vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\ \vec{e}_z$$

10.5 Laplacien scalaire

Le laplacien scalaire d'une fonction scalaire de point (noté lap ou Δ) est par définition un champ scalaire défini par :

$$lap\,(f) = \Delta f = div\left[\overrightarrow{grad}\,(f)\right]$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, il s'écrit :

$$lap\,(f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

10.6 Laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel (noté $\overrightarrow{lap}$ ou $\vec{\Delta}$) d'un champ vectoriel $\vec{v}$ est un champ vectoriel défini par :

$$\overrightarrow{lap}\,(\vec{v}) = \vec{\Delta}\,(\vec{v}) = \overrightarrow{grad}\,[div\,(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\,(\vec{v})\right]$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, le laplacien vectoriel a pour composantes :

$$\overrightarrow{lap}\,(\vec{v}) \begin{cases} \Delta v_x = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

10.7 Opérateur nabla

Pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels précédemment définis, on introduit un vecteur symbolique appelé opérateur nabla et défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Les opérateurs vectoriels s'écrivent parfois à l'aide de l'opérateur nabla sous les formes respectives suivantes :

- le gradient d'un champ scalaire f est noté

$$\overrightarrow{grad}\,(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

- la divergence d'un champ vectoriel est notée

$$div\,(\vec{v}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- le rotationnel d'un champ vectoriel est noté

$$\overrightarrow{rot}\,(\vec{v}) = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\,\vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\,\vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\,\vec{e}_z$$

- le laplacien scalaire d'un champ scalaire est noté

$$lap\,(f) = \Delta f = div\left[\overrightarrow{grad}\,(f)\right] = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \nabla^2\,(f)$$

∇^2 se lit "del de".

- le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel est noté

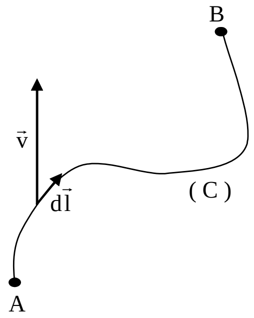
$$\overrightarrow{lap}\,(\vec{v}) = \vec{\Delta}\,(\vec{v}) = \overrightarrow{grad}\,[div\,(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\,(\vec{v})\right] = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}) - \vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{v}\right]$$

10.8 Théorème de Stokes-Théorème de Gauss

10.8.1 Circulation d'un champ vectoriel

On définit la circulation d'un vecteur $\vec{v}$ le long d'un contour (C), par l'intégrale curviligne :

$$\mathcal{C}_{\overrightarrow{AB}}\,(\vec{v}) = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{v}\cdot d\vec{l}$$



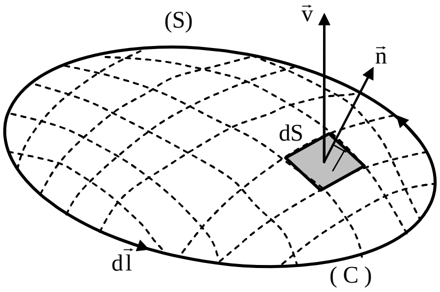
La circulation de long d'un contour fermé est notée :

$$\mathcal{C}\,(\vec{v}) = \oint \vec{v}\cdot d\vec{l}$$

10.8.2 Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur $\vec{v}$ à travers une surface (S) par l'intégrale double :

$$\phi_{/(S)}\left(\vec{v}\right)=\iint\limits_{(S)}\vec{v}\cdot\vec{n}\;dS$$



Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire $\vec{n}$ est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

10.8.3 Théorème de Stockes

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(\vec{v}\right) &= \phi_{/(S)}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{v}\right)\right)\\ \oint\vec{v}\cdot d\vec{l} &= \iint\limits_{(S)}\overrightarrow{rot}\left(\vec{v}\right)\cdot\vec{n}\;dS\end{aligned}$$

le vecteur unitaire $\vec{n}$ est orienté selon la convention du tire-bouchon de Maxwell.

10.8.4 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (S)est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume (τ)limité par la surface fermée (S) :

$$\int\limits_{(S}\int\limits_{fermée)}\vec{v}\cdot\vec{n}\;dS=\iiint\limits_{(\tau)}div\left(\vec{v}\right)\;d\tau$$

Chapitre 11

Les équations de Maxwell dans le vide

11.1 Le champ électromagnétique

Propriétés du champ électrostatique

Dans les états stationnaires, le champ électrique est appelé champ électrostatique. Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges de densité ρ située dans le vide, est à circulation conservative, c'est-à-dire qu'il satisfait les relations intégrale et locale :

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

où (Γ) est un contour fermé quelconque orienté.
Il satisfait également satisfait les relations intégrale et locale :

$$\begin{aligned} \int\int_{(S\ fermée)} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau \\ div\left(\vec{E}\right) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

où (S) est une surface fermée quelconque orientée vers l'extérieur et (τ) est le volume intérieur à (S). $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ est la permittivité du vide

11.1.1 Champ électromoteur et vecteur densité de courant

Le champ électromoteur

Lorsqu'un courant électrique circule dans un conducteur, cela implique l'existence d'une force motionnelle $\vec{f_m}$ agissant sur les porteurs de charge q et l'on définit le champ électromoteur

$\vec{E}_m$ par la relation

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{f}_m}{q}$$

La circulation de ce champ le long d'un contour fermé orienté (Γ) n'est pas conservative c'est-à-dire qu'elle est différente de zéro. Par définition cette circulation est appelée la force électromotrice e relative au contour considéré :

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

On peut bien entendu définir la f.é.m relative à un tronçon $\widehat{AB}$ orienté, non fermé :

$$e_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Le vecteur densité de courant

Un courant électrique correspond à des charges électriques mobiles. On appelle vecteur densité de courant $\vec{j}$, le vecteur tangent à la ligne de courant, et défini par

$$\vec{j} = \rho\ \vec{v}$$

où ρ est la densité volumique de charges mobiles et $\vec{v}$ la vitesse d'entraînement de ces charges mobiles. Le module de ce vecteur représente la charge qui traverse par unité de temps, l'unité de surface perpendiculaire à la direction de déplacement des charges mobiles ; il s'exprime en $A.m^{-2}$.
En régime stationnaire, c'est-à-dire lorsque le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est indépendant du temps, le flux de $\vec{j}$ est conservatif ce qui se traduit par les relations intégrale et locale :

$$\begin{aligned} \int\int_{(S\ fermée)} \vec{j} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ div\left(\vec{j}\right) &= 0 \end{aligned}$$

11.1.2 Le champ magnétique

Le champ magnétique $\vec{B}$ créé par une distribution de courants de densité $\vec{j}$ est à flux conservatif, c'est-à-dire qu'il satisfait les relations intégrale et locale :

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ div\left(\vec{B}\right) &= 0 \end{aligned}$$

où (S) est une surface fermée quelconque.
Le champ magnétique $\vec{B}$ satisfait les relations intégrale et locale :

$$\begin{aligned}\oint_{(\Gamma)} \vec{B}\cdot d\vec{l} &= \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j}\cdot d\vec{S} \\ \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) &= \mu_0\, \vec{j}\end{aligned}$$

où (Γ) est un contour fermé et orienté quelconque et (S) une surface quelconque s'appuyant sur (Γ) et orientée à partir de (Γ) par la règle dite du "tire-bouchon de Maxwell" ou "du bonhomme d'Ampère". $\mu_0 = 1.2566370614 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$ est la perméabilité magnétique du vide.

11.2 Le régime variable

11.2.1 Le phénomène de propagation

Considérons un ensemble constitué par des circuits parcourus par des courants et par des distributions de charge variant en fonction du temps ; cet ensemble pouvant être au repos ou en mouvement. Au voisinage de ces distributions règnent un champ électrique et un champ magnétique. Contrairement au cas stationnaire, ces champs ne sont pas synchrones avec les sources, c'est-à-dire qu'à un instant t donné, ces champs dépendent des valeurs des sources à l'instant $t-\theta$; nous exprimons ce fait en disant qu'il y a propagation à vitesse finie des champs à partir des sources qui leur donnent naissance et le retard θ est d'autant plus grand que le point où l'on désire connaître les champs est éloigné des sources.

11.2.2 Le phénomène d'induction

Un circuit filiforme au repos et parcouru par un courant invariable n'entraîne l'apparition d'aucune f.é.m ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos. Il n'en est pas de même si le courant varie ou si les circuits en présence se déplacent l'un par rapport à l'autre : la f.é.m ou le courant qui apparaissent sont dûs au phénomène d'induction. Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit) ; ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique.

11.2.3 Le phénomène de capacité

Un circuit comprenant un condensateur alimenté par une source de tension variable en fonction du temps, est parcouru par un courant variable bien que la continuité électrique soit interrompue par l'espace entre les armatures du condensateur. Dans ce cas l'intensité du courant n'est plus conservée tout au long du circuit puisqu'elle est nulle dans l'espace entre les armatures. Il n'est donc plus possible d'appliquer le théorème d'Ampère. Pour conserver la validité de ce dernier, nous serons amenés à introduire un courant "fictif" appelé courant de déplacement.

11.3 L'induction électromagnétique

11.3.1 Loi de Faraday-Lenz

On peut induire une f.é.m dans un circuit filiforme (C) fermé en faisant varier le flux magnétique à travers le circuit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

Pendant un temps dt, la variation du flux magnétique total à travers une surface quelconque s'appuyant sur le circuit (C) est $d\phi$; la f.é.m induite e s'exprime à l'aide de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Cette loi, établie expérimentalement pour des variations relativement lentes du flux magnétique en fonction du temps, est valable pour tout régime variable et elle sert de base à l'étude de l'électromagnétisme classique.

Puisque une f.é.m apparaît dans le circuit (C) et y fait circuler un courant ceci implique l'existence d'un champ électromoteur agissant sur les porteurs de charge du circuit (C). Ce champ est appelé champ électrique induit.

11.3.2 Equation de Maxwell-Faraday

Considérons un circuit (C) au repos soumis à un champ variable. Un champ électrique va prendre naissance dans tout l'espace où existe un champ magnétique variable. Le champ électrique induit joue un rôle de champ électromoteur et la f.é.m apparaissant dans tout le circuit (C) peut s'écrire :

$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où (S) est une surface orientée s'appuyant sur le contour orienté (C).
En permutant les opérateurs d'intégration et de dérivation on a :

$$\oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial\left(\vec{B} \cdot d\vec{S}\right)}{\partial t} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

car le circuit (C) étant immobile, la surface (S) l'est aussi et $d\vec{S}$ est indépendant du temps. En appliquant le théorème de Stokes nous pouvons écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}_i\right) \cdot d\vec{S} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Cette égalité étant satisfaite quel que soit (S) s'appuyant sur (C), il en résulte :

$$\overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}_i\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Remarquons que s'il existe en plus du champ électrique induit un champ électrostatique $\vec{E}_S$. Le champ total $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_S$ satisfait encore la relation ci-dessus car

$$\overrightarrow{rot}\,\left(\vec{E}_S\right) = \vec{0}$$

et on a la relation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{rot}\,\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En définitive, nous devons retenir de l'étude du phénomène d'induction électromagnétique le résultat fondamental suivant : en chaque point de l'espace où existe un champ magnétique variable nous devons associer un champ électrique induit variable à circulation non conservative c'est-à-dire ne dérivant pas d'un potentiel. L'ensemble de ces deux champs constitue le champ électromagnétique.

11.4 Le théorème d'Ampère

11.4.1 Equation de continuité

Si on considère une surface fermée (S) entourant un volume (τ) . Si ρ est la charge volumique et q la charge totale du volume (τ) à l'instant t ; on a

$$q = \iiint\limits_{(\tau)} \rho\, d\tau$$

Pendant l'intervalle de temps dt, la variation de la charge totale est dq et on a :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iiint\limits_{(\tau)} \rho\, d\tau\right)$$

mais $\int\limits_{(S\ \,ferm\acute{e}e)}\int \vec{j}\cdot d\vec{S}$ représente la charge totale sortant de la surface (S) par unité de temps, donc par suite de la conservation de la charge :

$$\frac{dq}{dt} = -\int\limits_{(S\ \,ferm\acute{e}e)}\int \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint\limits_{(\tau)} \rho\, d\tau\right) = -\iint\limits_{(S)} \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

En changeant l'ordre des opérations par rapport à l'espace et par rapport au temps, on a :

$$\iiint_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\int\int_{(S\ fermée)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

or, d'après le théorème d'Ostrogradsky :

$$\int\int_{(S\ fermée)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint div\ \left(\vec{j}\right)\ d\tau$$

donc

$$\iiint_{(\tau)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ \left(\vec{j}\right)\right]\ d\tau = 0$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit le volume (τ), il faut donc que l'on ait :

$$div\ \left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cette équation dite de continuité traduit la conservation de la charge électrique et montre que le flux du vecteur densité de courant n'est plus conservatif comme dans le cas des états stationnaires.

Ce qui se traduit localement par

$$div\ \left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ représente la densité volumique de charges . L'équation de continuité peut alors s'écrire :

$$div\ \left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = div\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(div\ \left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)\right) = div\left(\vec{j} + \frac{\partial\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)}{\partial t}\right) = 0$$

On voit que la relation fondamentale de conservation du flux de la densité de courant sera conservée si on l'applique à une densité de courant total $\vec{j}_T$ égale à la somme de la densité de courant vrai $\vec{j}$ (appelé courant de conduction) et d'une densité de courant fictif appelé courant de déplacement et défini par :

$$\vec{j}_D = \frac{\partial\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)}{\partial t}$$

d'où : $\vec{j}_T = \vec{j} + \vec{j}_D = \vec{j} + \frac{\partial\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right)}{\partial t}$ et $div\ \left(\vec{j}_T\right) = 0$

11.4.2 Le théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère peut être généralisé à condition de l'appliquer au courant total.La relation de Maxwell-Ampère qui en est la traduction s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}\,\left(\vec{B}\right)=\mu_0\,\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

La relation intégrale du théorème d'Ampère généralisé est :

$$\oint_{(\Gamma)}\frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot d\vec{l}=\iint_{(S)}\vec{j}_T\cdot d\vec{S}=\iint_{(S)}\left(\vec{j}+\frac{\partial\left(\varepsilon_0\vec{E}\right)}{\partial t}\right)$$

11.5 En résumé

En dehors des discontinuités, les équations de Maxwell s'écrivent :

- Théorème de Gauss pour $\vec{E}$

Forme locale	Forme intégrale
$div\,\left(\vec{E}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\int\int_{(S\ fermée)}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iiint_{(\tau)}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,d\tau$

- Théorème de Gauss pour $\overrightarrow{\vec{B}}$

Forme locale	Forme intégrale
$div\,\left(\vec{B}\right)=0$	$\int\int_{(S\ fermée)}\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$

- Loi de Faraday

Forme locale	Forme intégrale
$\overrightarrow{rot}\,\left(\vec{E}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(C)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\iint_{(S)}\vec{B}\cdot d\vec{S}$

- Théorème d'Ampère-Maxwell

Forme locale	Forme intégrale
$\overrightarrow{rot}\,\left(\vec{B}\right)=\mu_0\,\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\iint_{(S)}\left(\mu_0\,\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$

Chapitre 12

Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

12.1 Equations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$

En absence de charges et de courant, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} div\ \left(\vec{E}\right) &= 0 \\ div\ \left(\vec{B}\right) &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}\right) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}\ \left(\vec{B}\right) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{12.1}$$

Pour établir l'équation relative au champ électrique $\vec{E}$, il éliminer le champ magnétique $\vec{B}$. Pour cela, calculons le rotationnel de chacun des membres de le loi de Fraday :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}\right)\right) = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \tag{12.2}$$

en permutant l'ordre des dérivations, on obtient :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} \tag{12.3}$$

Sachant que

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\ div\ \left(\overrightarrow{E}\right) - \Delta \vec{E} \tag{12.4}$$

où Δ est le laplacien vectoriel, on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta\vec{E} - \overrightarrow{grad}\left(div\left(\vec{E}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\} \tag{12.5}$$

Comme en dehors des charges

$$div\left(\overrightarrow{E}\right) = 0 \tag{12.6}$$

on obtient finalement :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \tag{12.7}$$

Pour établir l'équation aux dérivées partielles pour le champ magnétique $\vec{B}$, calculons le rotationnel de chacun des membres du théorème d'Ampère-Maxwell :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{B}\right)\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\left(\overrightarrow{B}\right)\right) - \Delta\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\} \tag{12.8}$$

mais

$$div\left(\overrightarrow{B}\right) = 0 \tag{12.9}$$

et en inversant l'ordre des dérivations :

$$-\Delta\overrightarrow{B} = +\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right)\right] \tag{12.10}$$

or

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{12.11}$$

Donc

$$-\Delta\overrightarrow{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} \tag{12.12}$$

ou encore

$$\Delta\overrightarrow{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \tag{12.13}$$

On obtient la même expression que pour le champ électrique.
L'équation

$$\Delta\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \tag{12.14}$$

constitue l'équation de propagation du champ électromagnétique dans le vide, où on a posé $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$.

12.2 L'onde plane progressive sinusoïdale

12.2.1 Relation de dispersion

L'onde plane progressive sinusoïdale est définie, en notation complexe, par :

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}_0\ e^{i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \tag{12.15}$$

où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde donnant la direction de propagation de l'onde plane.

En utilisant la défintion du laplacien vectoriel dans un système de coordonnées cartésiennes, on peut montrer que :

$$\Delta\vec{E}=-k^2\ \vec{E} \tag{12.16}$$

L'équation de propagation s'écrit alors sous laforme

$$\left[-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right]\vec{E}=\vec{0} \tag{12.17}$$

L'onde plane progressive sinusoïdale constitue une solution particulière de l'équation d'onde seulement si la relation suivante, dite relation de dispersion, est satisfaite :

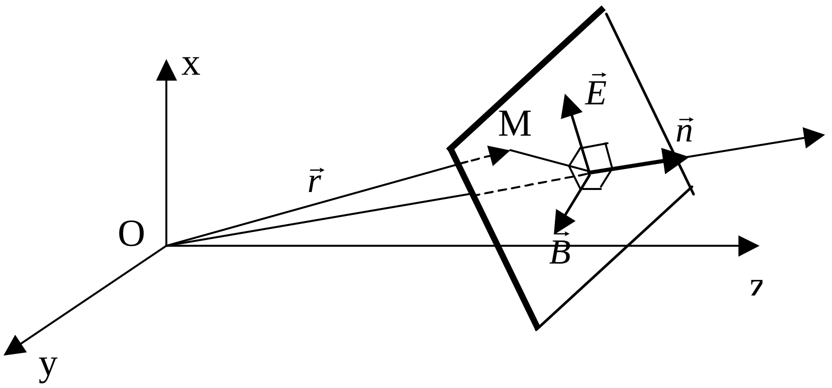
$$k=\frac{\omega}{c} \tag{12.18}$$

12.2.2 Structure de l'onde uniforme plane

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Gauss. On montre aisément que pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$div\left(\vec{E}\right)=0 \text{ est équivalente à } -i\ \vec{k}\cdot\vec{E}=0 \tag{12.19}$$

Soit encore $\vec{k}\cdot\vec{E}=0$; ce qui revient à dire que le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde $\vec{k}$. Le champ électrique est dit transversal.



12.3 Onde plane uniforme progressive et sinusoïdale

12.3.1 Onde de polarisation rectiligne

Jusqu'ici nous avons considéré un champ électrique $\vec{E}$ dont la variation en fonction de z et de t était quelconque. Nous allons maintenant examiner le cas où le champ $\vec{E}$ garde une direction constante (polarisation rectiligne) et varie sinusoïdalement ; il s'écrit alors :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \ \cos\left[\omega\left(t - \frac{\overrightarrow{n} \cdot \vec{r}}{c}\right)\right] = \vec{E}_0 \ \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)$$

où
$\vec{E}_0$ = vecteur constant
ω = pulsation de la fonction sinusoïdale
$k = \omega/c$: constante appelée nombre d'onde
$\vec{k} = k\ \overrightarrow{n}$: vecteur d'onde perpendiculaire au plan d'onde
$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$: phase instantanée ou plus simplement phase de la grandeur variable.
$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ vitesse de propagation dans le vide .
Les vecteurs forment toujours un trièdre direct et

$$\vec{B} = \frac{\overrightarrow{n} \times \vec{E}}{c} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

Pour préciser cette onde, supposons qu'elle se propage suivant $z'z$ d'où

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \ \cos(\omega t - kz)$$

On constate une double périodicité :

- Une périodicité temporelle : pour z donné le champ varie sinusoïdalement en fonction du temps avec une période
  $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
  ou une fréquence
  $$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$
  (f est en hertz).
- Une périodicité spatiale : à un instant t donné le champ varie sinusoïdalement en fonction de z avec une période
  $$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda}{k}$$
  (λ est appelée la longueur d'onde dans le vide). On peut remarquer que la longueur d'onde λ est égale à la distance parcourue par l'onde pendant une période.

12.3.2 Onde de polarisation quelconque

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé que le champ $\vec{E}$ (donc $\vec{B}$ également) gardait une direction constante. Dans le cas général, il n'en est pas toujours ainsi et les composantes du champ peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x}\ \cos\left(\omega t - kz - \phi_1\right) \\ E_y &= E_{0y}\ \cos\left(\omega t - kz - \phi_2\right) \end{aligned}$$

ϕ_1, ϕ_2 pouvant être différentes.
Etudions le comportement du champ $\vec{E}$ dans le plan $z = 0$. Les résultats obtenus se retrouvent avec un décalage temporel dans tout plan $z = cte$. Les composantes du champ s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x}\ \cos\left(\omega t - \phi_1\right) \\ E_y &= E_{0y}\ \cos\left(\omega t - \phi_2\right) \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

et si l'on prend pour origine des temps un instant où E_x passe par sa valeur maximale on a :

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{E_{0x}} &= \cos\left(\omega t\right) \\ \frac{E_y}{E_{0y}} &= \cos\left(\omega t - \phi\right) \end{aligned}$$

avec $\phi = \phi_2 - \phi_1$.

On peut déjà dire que l'extrémité du vecteur décrit une courbe inscrite dans un rectangle de côtés $2E_{0x}$ et $2E_{0y}$. D'autre part en développant l'expression de $\frac{E_y}{E_{0y}}$ et en éliminant le temps il vient :

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{E_{0y}} &= \cos\left(\omega t\right)\cos\left(\phi\right) + \sin\left(\omega t\right)\sin\left(\phi\right) \\ \frac{E_y}{E_{0y}} &= \frac{E_x}{E_{0x}}\ \cos\left(\phi\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_y}\right)^2}\ \sin\left(\phi\right) \end{aligned}$$

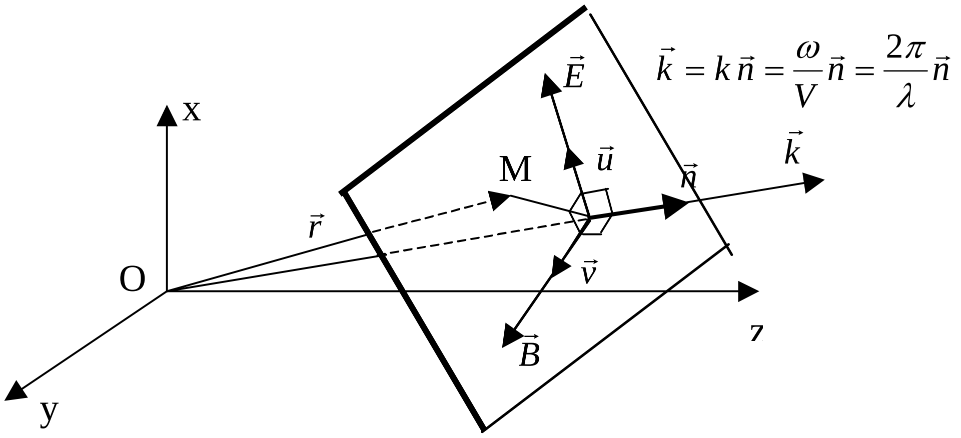
$$\left[\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\left(\phi\right)\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right]\sin^2\left(\phi\right)$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\left(\phi\right) = \sin^2\left(\phi\right)$$

Pour ϕ quelconque, cette équation est celle d'une ellipse : on dit que l'onde a une polarisation elliptique ; pour $\phi = m\pi (m = 0, 1, 2, \dots)$ l'ellipse dégénère en une droite et l'onde est dite à rectiligne. Enfin si $E_{0x} = E_{0y}$ et si $\phi = (2l + 1)\pi/2$ l'onde est dite à polarisation circulaire.

12.3.3 Notation complexe

Considérons une onde plane sinusoïdale polarisée rectilignement se propageant suivant une direction $\vec{n}$ et ayant pour vecteur d'onde $\vec{k} = k\ \vec{n}$.


$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{V}\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$
$\vec{E}$
x
$\vec{u}$
M
$\vec{n}$
$\vec{k}$
$\vec{r}$
O
$\vec{v}$
7
$\vec{B}$
y

Le support du vecteur champ électrique $\vec{E}$ de direction constante a pour vecteur unitaire $\vec{u}$ et nous pouvons écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}_0\ \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \psi\right)$$

sous la forme

$$\vec{E} = E_0\ \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \psi\right)\vec{u}$$

Avec $E_0 = cte$ =amplitude du champ E.

On sait qu'une grandeur sinusoïdale peut être représentée par un nombre complexe et qu'à chaque instant cette grandeur est obtenue en prenant la partie réelle du complexe qui la représente. Ainsi dans le cas présent, nous pouvons représenter la mesure

$$E = E_0\ \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \psi\right)$$

du vecteur champ électrique sur son support par le nombre complexe

$$E^* = E_0\ \exp\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \psi\right)$$

et nous avons bien à chaque instant

$$E = \mathrm{Re}\left(E^*\right)$$

Ce complexe appelé la composante complexe de E sur son support peut aussi bien s'écrire :

$$E^* = E_0\ e^{j\left(-\vec{k}\cdot\vec{r}+\psi\right)}e^{j\omega t} = \overline{E}\ e^{j\omega t}$$

où

$$\overline{E} = E_0\ e^{j\left(-\vec{k}\cdot\vec{r}+\psi\right)}$$

est l'amplitude complexe de la composante de $\vec{E}$ sur $\vec{u}$. Finalement nous caractérisons une onde plane polarisée rectilignement par sa représentation complexe :

$$\begin{aligned}\vec{E}^* &= E_0 e^{j\psi}\ e^{j\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}\vec{u}\\ \vec{B}^* &= B_0 e^{j\psi}\ e^{j\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}\vec{v}\end{aligned}$$

12.4 Energie électromagnétique : vecteur de Poynting

La propagation de l'énergie se manifeste expérimentalement dans de nombreux cas :

- On peut ressentir son effet si l'on s'expose aux rayons solaires ou au rayonnement d'une source chaude ;
- De même tout émetteur radio expédie de l'énergie à travers l'espace, une infime partie de cette dernière étant captée par votre récepteur radio.

Nous allons essayer de relier localement cette énergie qui se propage, au champ électromagnétique qui la transporte. Nous supposerons le milieu de propagation parfait, c'est à dire homogène, isotrope et linéaire.

12.4.1 Onde de forme spatiale et temporelle quelconques

Nous admettrons que les densités d'énergie électrique et magnétique calculées en régime stationnaire sont toujours valables en régime variable ; la densité d'énergie électromagnétique w en un point quelconque du milieu parcouru par une onde électromagnétique est donc à chaque instant :

w = densité d'énergie électrique + densité d'énergie magnétique

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

Considérons dans le milieu, un volume τ limité par une surface (S). L'énergie électromagnétique qu'il contient est à chaque instant :

$$W = \iiint_{(\tau)} w\ d\tau$$

Pendant un temps dt l'accroissement d'énergie dans (τ) sera dW et la puissance instantanée p' acquise par ce volume sera

$$p' = \frac{dW}{dt} = \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w}{\partial t} d\tau$$

On a :

$$\overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\ \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right] = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \left[\overrightarrow{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{rot}\ \vec{E}$$

D'après une relation de transformation, on a :

$$div \left[\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E} \right) - \vec{E} \cdot \overrightarrow{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)$$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -div \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)$$

et

$$p' = -\iiint_{(\tau)} div \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)\ d\tau$$

La puissance électromagnétique instantanée perdue par le volume (τ) est :

$$-p' = \iiint_{(\tau)} div \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)\ d\tau$$

Elle représente la puissance électromagnétique qui sort du volume (τ), c'est à dire la puissance moyenne p rayonnée par ce volume.

$$p = \iiint_{(\tau)} div \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)\ d\tau$$

D'après la formule d'Ostrogradsky, on peut écrire :

$$p = \iint_{(S)} \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Le vecteur

$$\overrightarrow{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

est appelé le vecteur de Poynting. Sa direction donne en chaque point, la direction d'écoulement de l'énergie et son flux à travers une surface est égal à la puissance électromagnétique instantanée rayonnée par cette surface. Les courbes tangentes en chaque point au vecteur de Poynting peuvent être considérées comme des trajectoires de l'énergie ; on les appelle les ''rayons électromagnétiques".

12.4.2 Onde plane progressive et uniforme sinusoïdale

Puisque $\left(\vec{E},\vec{B},\vec{n}\right)$ forment un trièdre trirectangle direct le vecteur $\overrightarrow{R}$ a même direction et sens que $\vec{k}$ c'est à dire que l'énergie s'écoule dans le sens de propagation (ce résultat n'est pas général ; en effet dans un milieu anisotrope par exemple $\overrightarrow{R}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires).

La puissance instantanée p_u traversant une surface unitaire (S) perpendiculaire à la direction de propagation est

$$p_u = \iint_{(S)} \overrightarrow{R}\cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \left\|\overrightarrow{R}\right\| \ dS = \left\|\overrightarrow{R}\right\| \iint_{(S)} dS = \left\|\overrightarrow{R}\right\| S$$

La puissance moyenne traversant (S) est alors

$$\langle P_u\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p_u \ dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left\|\overrightarrow{R}\right\| \ dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left\|\vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right\| \ dt$$

or $\vec{B}\perp\vec{E}$, et$\left\|\vec{B}\right\| = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\left\|\vec{E}\right\|$, d'où

$$\langle P_u\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \ dt$$

Si l'onde est polarisée rectilignement alors

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \ \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

$$\langle P_u\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \ \cos^2\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) dt$$

$$\langle P_u\rangle = \frac{E_0^2}{T}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int_0^T \frac{1}{2}\left[1+\cos\left[2\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]\right] \ dt$$

$$\langle P_u\rangle = E_{eff}^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{E_{eff}^2}{Z_0}$$

où E_{eff}= valeur efficace de E.

Le flux d'énergie traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation est une constante dépendant du milieu et proportionnelle au carré de la valeur efficace du champ électrique.

Chapitre 13

Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques

Nous allons dans ce chapitre utiliser les équations de maxwell pour étudier la propagation d'une onde d'une onde électromagnétique dans un milieu isolant puis sa réflexion et sa tranmission à un interface.

13.1 Equations de Maxwell dans les milieux parfaits

Nous supposerons que l'onde se propage dans un milieu illimité satisfaisant les conditions suivantes (milieu parfait) :
•Le milieu est considéré comme continu ; ce qui est légitime pour les ondes habituellement rencontrées (hertziennes et lumineuses) dont les longueurs d'onde sont, en général, très supérieures aux distances inter-atomiques.
•Le milieu est homogène et isotrope
•Le milieu peut être caractérisé par une permittivité ε et un permabilité μ et une conductivité γ constantes égales à celles définies en régime stationnaire (milieu linéaire).

Ces hypothèse simplificatrices permettent de traiter un grand nombre de problèmes ; il faut toutefois signaler qu'elles ne tiennent pas compte des phénomènes d'absorption, d'hystérésis et de dispersion (ε , μ et γ peuvent alors être complexes et dépendre de la fréquence).

Dans le cas des milieux homogènes, linéaires et isotopes, les équations de Maxwell deviennent :

- Théorème de Gauss pour $\vec{E}$

Forme locale	Forme intégrale
$div\ \left(\vec{E}\right) = \frac{\rho_{libres}}{\varepsilon}$	$\int\limits_{(S\ fermée)}\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{(\tau)} \frac{\rho_{libres}}{\varepsilon}\ d\tau$

- Théorème de Gauss pour $\overrightarrow{B}$

Forme locale	Forme intégrale
$div\ \left(\vec{B}\right) = 0$	$\displaystyle\int\int_{(S\ fermée)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

- Loi de Faraday

Forme locale	Forme intégrale
$\overrightarrow{rot}\ \left(\vec{E}\right) = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\displaystyle\oint_{(C)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_{(S)} \vec{B}\cdot d\vec{S}$

- Théorème d'Ampère-Maxwell

Forme locale	Forme intégrale
$\overrightarrow{rot}\ \left(\vec{B}\right) = \mu\ \vec{j} + \mu\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\displaystyle\oint_{(\Gamma)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \left(\mu\ \vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$

où

- $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ est la permittivité absolue du milieu diélectrique
- ε_r est la permittivité relative du milieu diélectrique.
- $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ est la permittivité du vide
- $\mu = \mu_0\mu_r$ est la perméabilité absolue du milieu
- $\mu\ _r$est la perméabilité relative du milieu.
- $\mu_0 = 1.2566370614 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$ est la perméabilité magnétique du vide

En tout point d'un conducteur, il existe une relation entre le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et le champ électrique total $\vec{E}$ (somme du champ électrostatique $\vec{E}_S$ et du champ électromoteur $\vec{E}_m$) dite relation d'Ohm Kirchhoff :

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \gamma\left(\vec{E}_S + \vec{E}_m\right)\\ \vec{j} &= \gamma\,\vec{E}\end{aligned}$$

où γ est la conductivité du milieu conducteur.

Cas particuliers :

- Isolants : $\gamma = 0$
- Conducteurs parfaits : $\gamma \to \infty$

13.2 Propagation dans les milieux diélectriques

Les milieux diélectriques sont des mieux isolants. Leur conductivité est extrêmement faible, de l'ordre de 10^{-20} à 10^{-12} $(\Omega\cdot m^{-1})$, celle d'un conducteur métallique étant de l'ordre de 10^7 $(\Omega\cdot m^{-1})$, à température ambiante. Il est donc tout à fait raisonnable de prendre pour γ la valeur $\gamma = 0$. Par ailleurs dans un tel milieu, $\rho_{libre} = 0$.

Les équations de Maxwell se simplifent alors en :

$$\begin{aligned} div\left(\vec{E}\right) &= 0 \\ div\left(\vec{B}\right) &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\left(\vec{E}\right) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) &= \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

En utilisant la même démarche que dans le chapitre précédent, on peut montrer que le champ électrique et le champ magnétique satisfont les équations de propagation suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{E} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \overrightarrow{0} \\ \Delta\vec{B} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

où la vitesse de propagation de l'onde est :

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

$n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ est l'indice de réfraction (ou indice optique) du milieu. Dans les milieux réels n est constant pour les grandes longueurs d'onde, tandis que pour les hautes fréquences il faut faire intervenir le phénomène de dispersion qui entraîne une dépendance de n avec la fréquence.

Dans la plupart des diélectriques $\mu_r = 1$, d'où $n = \sqrt{\varepsilon_r}$.

On peut égalment montrer que l'impédance caractéristique d'un tel milieu peut s'écrire :

$$Z = \frac{Z_0}{n}$$

où Z_0 est l'mpédance caractéristique du vide.

13.3 Relations de passage

Composante tangentielle et composante normale de $\vec{E}$

A la traversée d'une surface (Σ) séparant deux milieux et portant des charges vraies avec une densité supercielle σ, les relations locales s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} &= 0 \\ \varepsilon_2\ E_{N2} - \varepsilon_1\ E_{N1} &= \sigma \end{aligned}$$

où $\vec{E}_T$ est la composante de $\vec{E}$ dans le plan tangent à (Σ) en M , tandis que E_N mesure de la composante de $\vec{E}$ suivant la normale $\vec{n}$ en M et orientée du milieu (1) vers le milieu (2).

Composante tangentielle et composante normale de $\vec{B}$

A la traversée d'une surface (Σ) séparant deux milieux et parcourue par des courants vrais de densité superficielle $\vec{j}_S$, les relations locales $\vec{B}$ deviennent :

$$\begin{aligned} B_{N2} &= B_{N1} \\ \mu_2\ \vec{B}_{T2} - \mu_1\ \vec{B}_{T1} &= \vec{j}_S \times \vec{n} \end{aligned}$$

où B_N est la composante de $\vec{B}$ suivant la normale au point M considéré orientée du milieu (1) vers le milieu (2);tandis que $\vec{B}_T$ est la composante de $\vec{B}$ dans le plan tangent à (Σ) en M.

13.4 Lois de Snell-Descartes

Considérons deux milieux l et 2, parfaits, isolants, non magnétiques et semi-infinis, caractérisés respectivement par ε_1,$\mu_1 = \mu_0$, $\gamma_1 = 0$ et par ε_2,$\mu_2 = \mu_0$, $\gamma_2 = 0$, et séparés par une interface plane. On constate expérimentalement qu'une onde plane incidente arrivant à cette interface donne généralement naissance à deux ondes, une onde plane réfléchie et une onde plane transmise ou réfractée (la réflexion entre deux milieux parfaits et isolants est souvent appelée réflexion vitreuse)

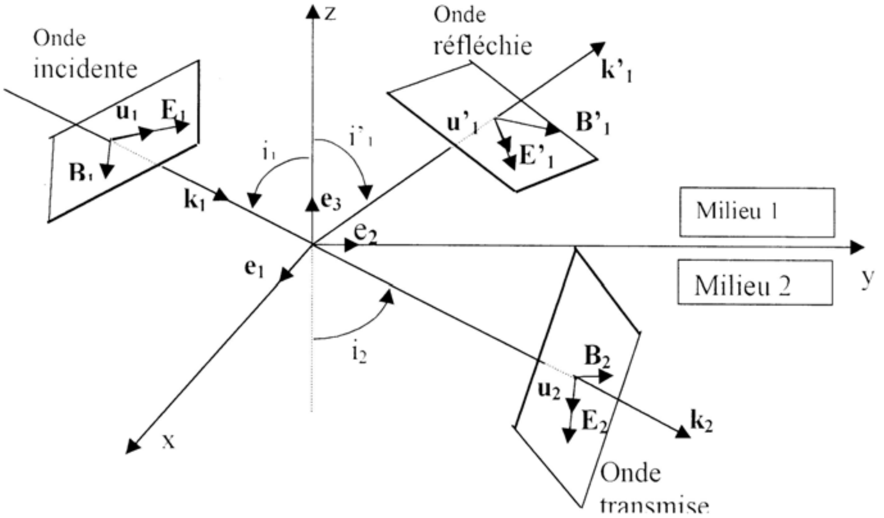
Nous nous proposons de déterminer entièrement les ondes réfléchie et transmise en appliquant les équations de propagation et en tenant compte des conditions aux limites. Quel que soit l'état de la polarisation de l'onde incidente, il est toujours possible de la décomposer en deux ondes à polarisation rectiligne perpendiculaires entre elles en projetant le vecteur incident sur deux axes perpendiculaires ; nous étudierons donc d'abord le cas d'une onde incidente polarisée rectilignement.

Définissons un trièdre de référence par une origine O appartenant au plan séparant les deux milieux, l'axe Oz étant perpendiculaire à ce plan et l'axe Oy étant tel que le plan yOz contienne le vecteur k_1 de l'onde incidente. En appelant $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}'_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ les vecteurs unitaires des supports des vecteurs champs électriques des différentes ondes, nous pouvons représenter ces dernières en notation complexe par

- Onde incidente : $\overrightarrow{E}_1 = E_{01}\ \overrightarrow{u}_1\ e^{j\left(\omega_1 t - \overrightarrow{k}_1 \cdot \overrightarrow{r}_1\right)}$
- Onde réfléchie : $\overrightarrow{E}'_1 = E'_{01}\ \overrightarrow{u}'_1\ e^{j\left(\omega'_1 t - \overrightarrow{k}'_1 \cdot \overrightarrow{r}_1\right)}$
- Onde transmise : $\overrightarrow{E}_2 = E_{02}\ \overrightarrow{u}_2\ e^{j\left(\omega_2 t - \overrightarrow{k}_2 \cdot \overrightarrow{r}_2\right)}$

Dans ces expressions E_{01} , E'_{01} et E_{02} sont les amplitudes complexes des différents champs électriques. En un point quelconque M_0 du plan xOy tel que $\overrightarrow{OM}_0 = \overrightarrow{r}_0$,les ondes sont représentées par

- Onde incidente : $\overrightarrow{E}_1 = E_{01}\ \overrightarrow{u}_1\ e^{j\left(\omega_1 t - \overrightarrow{k}_1 \cdot \overrightarrow{r}_0\right)}$
- Onde réfléchie : $\overrightarrow{E}'_1 = E'_{01}\ \overrightarrow{u}'_1\ e^{j\left(\omega'_1 t - \overrightarrow{k}'_1 \cdot \overrightarrow{r}_0\right)}$
- Onde transmise : $\overrightarrow{E}_2 = E_{02}\ \overrightarrow{u}_2\ e^{j\left(\omega_2 t - \overrightarrow{k}_2 \cdot \overrightarrow{r}_0\right)}$



Réflexion-transmission

La continuité de la composante tangentielle du champ entraîne une relation entre les composantes tangentielles de la forme

$$\overrightarrow{a}_1\ E_{01}e^{j\left(\omega_1 t-\overrightarrow{k}_1\cdot\overrightarrow{r}_0\right)}+\overrightarrow{a}'_1\ E_{01}e^{j\left(\omega'_1 t-\overrightarrow{k}'_1\cdot\overrightarrow{r}_0\right)}=\overrightarrow{a}_2\ E_{02}e^{j\left(\omega_2 t-\overrightarrow{k}_2\cdot\overrightarrow{r}_0\right)}$$

Pour que cette relation soit satisfaite à chaque instant en tout point M_0 de la surface de séparation, il faut que

$$\omega_1 t-\overrightarrow{k}_1\cdot\overrightarrow{r}_0=\omega'_1 t-\overrightarrow{k}'_1\cdot\overrightarrow{r}_0=\omega_2 t-\overrightarrow{k}_2\cdot\overrightarrow{r}_0$$

ce qui implique

$$\omega_1=\omega'_1=\omega_2 \quad \text{et que} \quad \overrightarrow{k}_1\cdot\overrightarrow{r}_0=\overrightarrow{k}'_1\cdot\overrightarrow{r}_0=\overrightarrow{k}_2\cdot\overrightarrow{r}_0$$

La dernière relation conduit à

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{k}'_1-\overrightarrow{k}_1\right)\cdot\overrightarrow{r}_0 &= 0\\ \left(\overrightarrow{k}_2-\overrightarrow{k}_1\right)\cdot\overrightarrow{r}_0 &= 0\end{aligned}$$

qui seront satisfaites quel que soit le point M_0 si ($\left(\overrightarrow{k}'_1-\overrightarrow{k}_1\right)$ et $\left(\overrightarrow{k}_2-\overrightarrow{k}_1\right)$ sont perpendiculaires au plan xOy, c'est à dire si $\overrightarrow{k}_1$, $\overrightarrow{k}'_1$ et $\overrightarrow{k}_2$ sont coplanaires : ces trois vecteurs appartiennent au plan d'incidence $\left(\overrightarrow{k}_1, \overrightarrow{e}_3\right)$.

En prenant $\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{e}_2$, on obtient

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{k}'_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{k}_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 & \Rightarrow & k'_1 \sin(i'_1) \ = k_1 \ \sin(i_1) \\ \overrightarrow{k}_2 \cdot \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{k}_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 & \Rightarrow & k_2 \ \sin(i_2) = k_1 \ \sin(i_1) \end{array}$$

or $k_1 = \dfrac{\omega}{V_1}$, $k'_1 = \dfrac{\omega}{V_1}$ et $k_2 = \dfrac{\omega}{V_2}$; d'où

$$\sin(i'_1) = \sin(i_1) \quad \Rightarrow \quad i'_1 = i_1$$

$$\frac{\sin(i_2)}{V_2} = \frac{\sin(i_1)}{V_1}$$

En multipliant les deux membres de la dernière relation par c (vitesse de propagation dans le vide) et en faisant intervenir les indices des milieux, on obtient

$$n_1 \ \sin(i_2) = n_2 \sin(i_1)$$

En définitive nous avons montré que :

- Les ondes réfléchie et transmise ont même fréquence que l'onde incidente
- Les vecteurs d'onde réfléchi et transmis sont dans le plan d'incidence (plan et la normale à la surface de séparation au point d'incidence)
- L'angle de réflexion i'_1est égal à l'angle d'incidence i_1
- Les angles de transmission i_2 et d'incidence i_l sont liés par $n_1 \ \sin(i_2) = n_2 \sin(i_1)$ (loi de la réfraction).

Ces résultats représentent les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.

13.5 Formules de Fresnel

Nous allons étudier successivement le cas d'une onde dont le champ électrique est polarisé rectilignement dans le plan d'incidence puis le cas d'une onde dont le champ électrique est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence

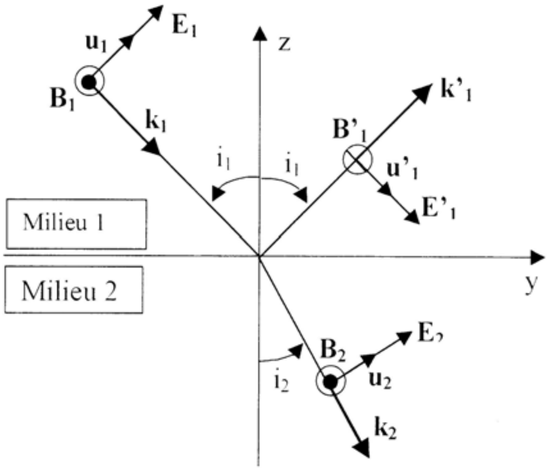
13.5.1 Champ électrique dans le plan d'incidence

Le trièdre de référence est choisi comme précédemment et les champs positifs des champs électrique et magnétique sont indiqués sur la figure (Pour satisfaire les raisons de continuité et de symétrie, il faut supposer que les ondes réfléchie et transmise ont leur vecteur champ électrique polarisé dans le plan d'incidence).

Sachant que les différents vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}'_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont dans le plan d'incidence, les différentes ondes ont pour représentation complexe :

- Onde incidente : $\overrightarrow{E}_1 = E_{01} \ \overrightarrow{u}_1 \ e^{j\left(\omega_1 t - \overrightarrow{k}_1 \cdot \overrightarrow{r}_1\right)}$
- Onde réfléchie : $\overrightarrow{E}'_1 = E'_{01} \ \overrightarrow{u}'_1 \ e^{j\left(\omega'_1 t - \overrightarrow{k}'_1 \cdot \overrightarrow{r}_1\right)}$

– Onde transmise : $\overrightarrow{E}_2 = E_{02}\ \overrightarrow{u}_2\ e^{j\left(\omega_2 t - \overrightarrow{k}_2 \cdot \overrightarrow{r}_2\right)}$



Champ électrique parallèle au plan d'incidence

Dans le milieu l l'onde résultante est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Les continuités des composantes tangentielles du champ électrique et de l'excitation magnétique à la traversée de la surface séparant les deux milieux permet, si l'on tient compte de $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, de $B_0 = E_0/V$ et de la condition $\overrightarrow{k}_1 \cdot \overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{k}'_1 \cdot \overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{k}_2 \cdot \overrightarrow{r}_0$ d'obtenir les relations

$$\begin{aligned} E_{01}\ \cos(i_1) + E'_{01}\ \cos(i_1) &= E_{02}\ \cos(i_2) \\ \frac{E_{01}}{V_1} - \frac{E'_{01}}{V_1} &= \frac{E_{02}}{V_2} \end{aligned}$$

(le signe moins provient du sens de $\overrightarrow{B}'_1$ opposé à celui de Ox ; ce sens a été choisi ainsi pour respecter le fait que $\left(\vec{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k}\right)$ est toujours direct).

A partir des relations ci-dessus, on obtient E'_{01} et E_{02} en fonction de E_{01} :

$$\begin{aligned} E_{01}\ \frac{\cos(i_1)}{\cos(i_1)} + E'_{01} &= E_{02}\ \frac{\cos(i_2)}{\cos(i_1)} \\ E_{02}\frac{V_1}{V_2} + E'_{01} &= E_{01} \end{aligned}$$

or

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)}$$

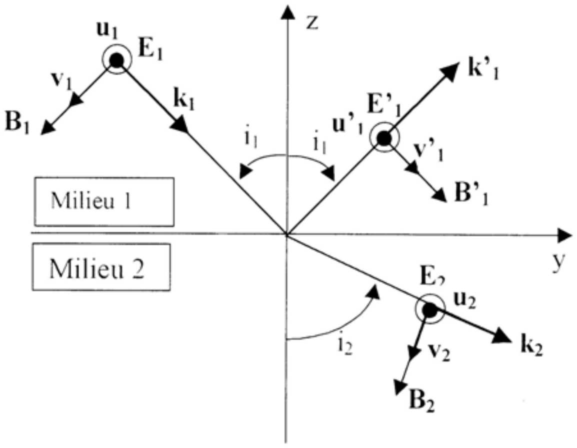
d'où les formules de Fresnel

$$\begin{aligned} T_{\|} &= \left[\frac{E_{02}}{E_{01}}\right]_{\|} = \frac{2\ \cos(i_1)\sin(i_2)}{\sin(i_1)\cos(i_1)+\sin(i_2)\cos(i_2)} = \frac{2\ \cos(i_1)\sin(i_2)}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)} \\ R_{\|} &= \left[\frac{E'_{01}}{E_{01}}\right]_{\|} = \frac{\sin(i_1)\cos(i_1)-\sin(i_2)\cos(i_2)}{\sin(i_1)\cos(i_1)+\sin(i_2)\cos(i_2)} = -\frac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)} \end{aligned}$$

Nous notons $[\ \ ]_{\|}$ pour indiquer que le champ électrique est dans le plan d'incidence.

13.5.2 Champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence :

Les dispositions et les sens positifs pour les champs sont indiqués sur la figure cidessous



Champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence

si l'on tient compte de $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, de $B_0 = E_0/V$ et de la condition $\overrightarrow{k}_1 \cdot \overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{k}'_1 \cdot \overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{k}_2 \cdot \overrightarrow{r}_0$ les conditions de continuité à la traversée de la surface séparant les deux milieux permettent d'obtenir les relations

$$\begin{aligned} E_{01} + E'_{01} &= E_{02} \\ -\frac{E_{01}}{V_1}\cos(i_1) + \frac{E'_{01}}{V_1}\cos(i_1) &= -\frac{E_{02}}{V_2}\cos(i_2) \end{aligned}$$

En tenant compte

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)}$$

on obtient finalement les formules de Fresnel

$$\begin{aligned} T_\perp &= \left[\frac{E_{02}}{E_{01}}\right]_\perp = \frac{2\ \sin(i_2)\cos(i_1)}{\sin(i_1+i_2)} \\ R_\perp &= \left[\frac{E'_{01}}{E_{01}}\right]_\perp = -\frac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)} \end{aligned}$$

Nous notons $[]_\perp$pour indiquer que le champ est perpendiculaire au plan d'incidence

13.5.3 Discussion des résultats

Dans les formules de Fresnel, les coefficients de réflexion et de transmission sont des nombres réels ; il en résulte que le déphasage introduit par la réflexion ou la transmission aura toujours une valeur nulle ou égale à π.

Incidence normale :

Nous obtiendrons les résulats de l'incidence normale en faisant tendre i_l vers zéro et en tenant compte alors de $n_l\ i_1 = n_2\ i_2$. Les relations de Fresnel s'écrivent alors

$$\begin{aligned} T_{\|} &= T_\perp = \frac{2\ n_1}{n_1+n_2} \\ R_{\|} &= R_\perp = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \end{aligned}$$

- Les ondes réfléchie et transmise sont indépendantes de la polarisation de l'onde incidente
- L'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente
- La composante électrique est déphasée de π à la réflexion si $n_l < n_2$; elle n'est pas déphasée si $n_1 > n_2$.

Intéressons nous maintenant au comportement énergétique de l'onde à l'interface plane ; ce comportement sera caractérisé par les deux coefficients suivants

- Le pouvoir reflecteur $\alpha_R = \dfrac{\text{puissance réflechie}}{\text{puissance incidente}}$
- Le facteur de transmission $\alpha_T = \dfrac{\text{puissance transmise}}{\text{puissance incidente}}$

Les relations donnant les intensités, c'est à dire les puissances par unité de surface, transportées par les différentes ondes sont données par

$$I_1 = \frac{E_{01}^2 n_1}{2c\mu_1}\ ;\ I'_1 = \frac{E'^2_{01} n_1}{2c\mu_1} \text{ et } I_2 = \frac{E_{02}^2 n_2}{2c\mu_2} \text{ avec } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha_R &= \left[\frac{E'_{01}}{E_{01}}\right]^2 = \left[\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right]^2 \\ \alpha_T &= \left[\frac{E_{02}}{E_{01}}\right]^2 = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2} \end{aligned}$$

Remarque : La conservation de la puissance implique $\alpha_R + \alpha_T = 1$ ce que l'on peut vérifier à partir des deux dernières relations. D'autre part, le pouvoir réflecteur et le facteur de transmission ne dépendent pas du sens de propagation de l'onde incidente (milieu 1 → milieu 2 ou milieu 2 → milieu 1). Pour les ondes lumineuse, dans le cas où les milieux sont l'air et le verre ($n_l = l$, $n_2 = 1.5$) on a $\alpha_R = 0.04$ et $\alpha_T = 0.96$.

Incidence oblique

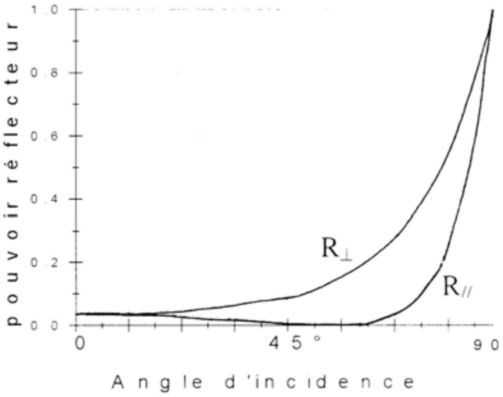
Nous allons discuter le comportement de l'onde en fonction de son angle d'incidence i_l $\left(0 \leq i_1 \leq \frac{\pi}{2}\right)$ dans le cas particulier où $n_l < n_2$:

- Onde transmise : Puisque $sin(i_2) = \frac{n_1}{n_2} sin(i_l)$ on a $i_2 < i_1$ et il existera toujours une onde transmise. Il en résulte que le champ électrique de l'onde transmise, aussi bien dans le cas de polarisation dans le plan d'incidence (noté $\|$) que de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence (noté $\perp$), reste en phase avec celui de l'onde incidente sur la surface de séparation

- Onde réfléchie : Pour une onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence ($\perp$) le champ électrique réfléchi est toujours en opposition de phase avec celui de l'onde incidente. Pour une onde polarisée dans le plan d'incidence ($\|$) et sous incidence normale, le champ électrique réfléchi est en opposition de phase avec le champ incident. Lorsque l'angle d'incidence atteint la valeur i_{1B} définie par $i_{1B} + i_2 = \frac{\pi}{2}$, le champ électrique réfléchi s'annule. Cet angle i_{1B} est appelé angle de Brewster et en tenant compte de $n_l \ \sin(i_l) = n_2 \ \sin(i_2)$, on trouve qu'il a pour valeur $i_{1B} = a\tan(n_2/n_l)$. Pour un angle d'incidence proche de $\frac{\pi}{2}$ (incidence rasante) ; le champ électrique réfléchi a même amplitude que le champ incident et ils sont en opposition de phase.
  Si l'onde lumineuse arrive directement d'une source (le soleil par exemple) sur une surface vitreuse, elle est polarisée elliptiquement et on peut la considérer comme la superposition de deux ondes polarisées rectilignement l'une dans le plan d'incidence l'autre perpendiculairement au plan d'incidence. Suivant l'angle d'incidence, la lumière réfléchie sera plus ou moins polarisées rectilignement cette polarisation étant totale pour l'angle de Brewster la vibration lumineuse est alors rectiligne et parallèle à la surface réfléchissante.
- Pouvoirs réflecteurs : Les pouvoirs réflecteurs (intensité réfléchie sur intensité incidente) ont respectivement pour valeur

$$\begin{aligned} \alpha_{R\|} &= \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)} \\ \alpha_{R\perp} &= \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} \end{aligned}$$

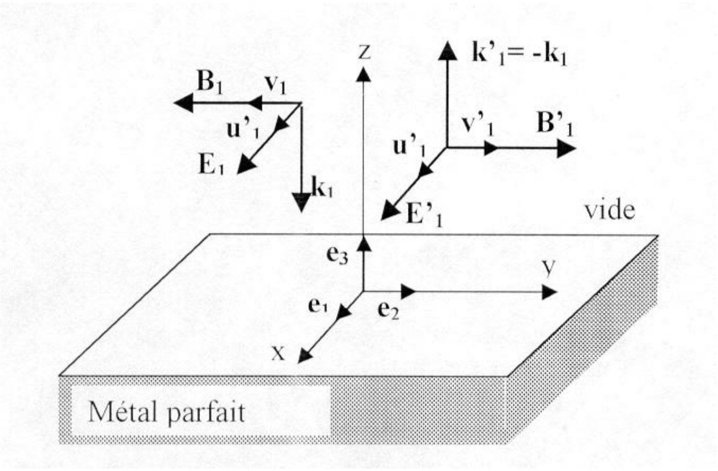
  La figure dessous donne pour une onde lumineuse et dans le cas air-verre, la variation des pouvoirs réflecteurs en fonction de l'angle d'incidence ($i_{1B} = 56,3°$) .



Variation du pouvoir réflecteur en fonction de l'angle d'incidence

13.6 Réflexion sur un conducteur parfait

Considérons une onde plane incidente uniforme sinusoïdale polarisée rectilignement ($\overrightarrow{E}_I \parallel Ox$) se propageant dans le vide (ou l'air) suivant zO et arrivant sous incidence normale, à la surface plane d'un conducteur de conductivité infinie (conducteur parfait). Des considérations énergétiques montrent qu'il n'y pas d'onde transmise $\left(\overrightarrow{E}_2 = \overrightarrow{0}\, et \, \overrightarrow{B}_2 = \overrightarrow{0}\right)$ et que les seuls courants vrais pouvant être induits par cette onde le sont sur la surface du métal. Les raisons de symétrie impliquent que les directions de polarisation des vecteurs incident et réfléchi sont identiques.



Réflexion métallique en incidence normale

Les champs électrique et magnétique des ondes incidente et réfléchie sont

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}_1 &= E_{01}\ e^{j(\omega t+k_1 z)}\ \overrightarrow{e}_1\,;\ \overrightarrow{B}_1 = -\frac{E_{01}}{c}\ e^{j(\omega t+k_1 z)}\ \overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{E}'_1 &= E'_{01}\ e^{j(\omega t-k_1 z)}\ \overrightarrow{e}_1\,;\ \overrightarrow{B}_1 = \frac{E'_{01}}{c}\ e^{j(\omega t-k_1 z)}\ \overrightarrow{e}_2\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}'_1 = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}'_1 = \overrightarrow{e2}\,;\ \overrightarrow{k}_1 = -k_1\ \overrightarrow{e}_3\,;\ \overrightarrow{r}_1 = \overrightarrow{r}'_1 = z\ \overrightarrow{e}_3$ et $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$.

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique permet d'écrire à la traversée de la surface de séparation $(z = O)$

$$\{E_{01} + E'_{01}\}_{z=0} = 0 \ \text{ d'où } E_{01} = -E'_{01}$$

Le champ électrique réfléchi a même amplitude que le champ électrique incident et il est déphasé de π par rapport à ce dernier. Pour satisfaire à la directivité du trièdre $\left(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k}\right)$ le champ magnétique est réfléchi suivant $\overrightarrow{B}_1$ c'est à dire que sa réflexion s'effectue sans changement de phase. En définitive les ondes incidente et réfléchie s'écrivent

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}_1 &= E_{01}\ e^{j(\omega t+k_1 z)}\ \overrightarrow{e}_1\,;\ \overrightarrow{B}_1 = -\frac{E_{01}}{c}\ e^{j(\omega t+k_1 z)}\ \overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{E}'_1 &= -E_{01}\ e^{j(\omega t-k_1 z)}\ \overrightarrow{e}_1\,;\ \overrightarrow{B}_1 = -\frac{E_{01}}{c}\ e^{j(\omega t-k_1 z)}\ \overrightarrow{e}_2\end{aligned}$$

Dans le vide, l'onde résultante est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et ses vecteurs champs ont pour valeur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E} &= \overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}'_1 = E_{01}\ \left(e^{+jk_1 z}\ - e^{-jk_1 z}\right) e^{j\omega t}\ \overrightarrow{e}_1 \\ \overrightarrow{E} &= 2E_{01}\sin(k_1 z)\ e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}\ \overrightarrow{e}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B} &= \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}'_1 = -\frac{E_{01}}{c}\ \left(e^{+jk_1 z}\ + e^{-jk_1 z}\right) e^{j\omega t}\ \overrightarrow{e}_1 \\ \overrightarrow{B} &= 2\frac{E_{01}}{c}\cos(k_1 z)\, e^{j(\omega t+\pi)}\ \overrightarrow{e}_1\end{aligned}$$

En revenant à la notation réelle

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E} &= 2E_{01}\sin(k_1 z)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\ \overrightarrow{e}_1 \\ \overrightarrow{B} &= 2\frac{E_{01}}{c}\cos(k_1 z)\cos(\omega t+\pi)\ \overrightarrow{e}_1\end{aligned}$$

Ces relations montrent que les champs ne se propagent plus mais qu'ils oscillent sinusoïdalement en fonction du temps avec une amplitude qui est fonction de la distance z, leur déphasage étant de $\dfrac{\pi}{2}$ on dit que l' onde est stationnaire.

L'amplitude du champ électrique est nulle pour $k_1 z = \frac{2\pi}{\lambda} z = l\ \pi (l = 0, 1, 2, ...)$, c'est à dire pour $z = l\frac{\lambda}{2}$.

L'amplitude du champ magnétique est nulle pour $k_1 z = \frac{2\pi}{\lambda} z = \left(l + \frac{1}{2}\right)\ \pi\ \ (l = 0, 1, 2, ...)$, c'est à dire pour $z = \left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$.

Les points où l'amplitude est nulle sont appelés les noeuds et les points où l'amplitude est maximale sont appelés les ventres.

Annexe A

Equations différentielles

A.1 Introduction

Les oscillations linéaires des systèmes à un degré de liberté sont régies par des équations différentielles du second ordre à coefficients constants. Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une relation entre une variable dépendante y et ses dérivées première et seconde par rapport à une variable indépendante t, qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\delta\frac{dy}{dt}+\omega_0^2\,y=A(t)$$

Les coefficients δ et ω_0 sont des constantes réelles positives. Dans les problèmes de vibration le paramètre t représente le temps et on note par convention :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \dot{y}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \ddot{y}\end{aligned}$$

D'où l'écriture de l'équation différentielle :

$$\ddot{y}+2\,\delta\,\dot{y}+\omega_0^2\,y=A(t)$$

A.2 Equation homogène

L'équation différentielle est dite homogène si $A(t)=0$:

$$\ddot{y}+2\,\delta\,\dot{y}+\omega_0^2\,y=0$$

On recherche des solutions qui sont de la forme $y(t)=e^{st}$. Dans ce cas l'équation différentielle s'écrit :

$$\left[s^2 + 2\delta\, s + \omega_0^2\right]\, e^{st} = 0$$

Cette équation doit être vraie quel que soit t, ce qui implique :

$$s^2 + 2\delta\, s + \omega_0^2 = 0$$

On obtient ainsi une équation du second degré en s dite équation caractéristique. Les racines de cette équation caractéristique sont :

$$s_1 = -\delta + \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$s_2 = -\delta - \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

A_1 et A_2 sont deux constantes d'intégration que l'on peut déterminer à partir des conditions initiales :

$$\begin{aligned} y(t &= 0) = y_0 \\ \dot{y}(t &= 0) = \dot{y}_0 \end{aligned}$$

Sachant que δ et ω_0 sont des nombres réels positifs, s_1 et s_2 sont négatives ou complexes avec une partie réelle négative. La nature des solutions s_1 et s_2 de l'équation caractéristique dépend de la valeur relative de δ par rapport à ω_0 . Ainsi trois cas sont à envisager :

A.2.1 Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$)

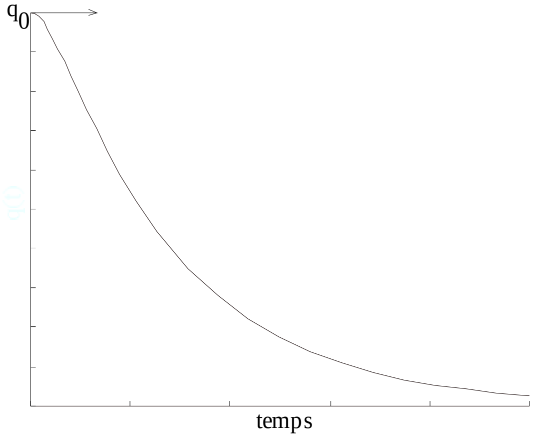
Dans ce cas, les deux racines s_1 et s_2 sont réelles et négatives. L'écriture des conditions initiales donne un système de deux équations :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= y_0 \\ s_1 A_1 + s_2 A_2 &= \dot{y}_0 \end{aligned}$$

dont les solutions sont les constantes d'intégration A_1 et A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{s_2 y_0 - \dot{y}_0}{s_2 - s_1} \\ A_2 &= \frac{\dot{y}_0 - s_1 y_0}{s_2 - s_1} \end{aligned}$$

$y(t)$ est une fonction décroissant sans oscillations vers zéro lorsque t augmente. La forme exacte de $y(t)$ dépend des valeurs de A_1 et A_2 qui sont déterminées par les conditions initiales. Pour les conditions initiales particulières suivantes :$y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = 0$, la figure suivante représente les variations de y au cours du temps



Régime apériodique

A.2.2 Régime critique ($\delta = \omega_O$)

L'équation caractéristique possède une racine double :

$$s_1 = s_2 = -\delta$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\delta t}$$

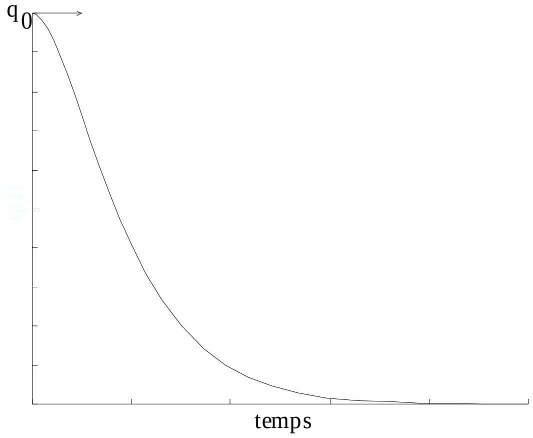
Les constantes d'intégration A_1 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales et valent :

$$\begin{aligned} A_1 &= y_0 \\ A_2 &= \dot{y}_0 + \delta\, y_0 \end{aligned}$$

$y(t)$ et une fonction décroissant vers zéro quand t augmente. Il est aisé de vérifier que cette situation correspond à la décroissance la plus rapide de $y(t)$. Ce cas correspond au régime critique. Pour le cas particulier de conditions initiales :$y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = 0$, la solution est :

$$y\,(t) = y_0\, e^{-\delta t}\,(1 + \delta t)$$

La figure ci-dessous représente les variations de $y(t)$.



Régime critique

A.2.3 Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)

Dans ce cas s_1 et s_2 sont complexes conjugués :

$$\begin{aligned} s_1 &= -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ s_2 &= -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \end{aligned}$$

où j représente le nombre imaginaire pur vérifiant la relation $j^2 = -1$. Posons :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

La solution générale s'écrit alors :

$$y(t) = e^{-\delta t}\left[A_1\, e^{j\omega_D t} + A_2\, e^{-j\omega_D t}\right]$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} e^{j\omega_D t} &= \cos(\omega_D t) + j\,\sin(\omega_D t) \\ e^{-j\omega_D t} &= \cos(\omega_D t) - j\,\sin(\omega_D t) \end{aligned}$$

$y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = e^{-\delta t}\,\left[(A_1 + A_2)\cos(\omega_D t) + j\,\left(A_1 - A_2\right)\,\sin(\omega_D t)\right]$$

$y(t)$ étant réelle, les nombres complexes A_1 et A_2 doivent vérifier les relations :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &: \textit{réel} \\ A_1 - A_2 &: \textit{imaginaire} \end{aligned}$$

A_1 et A_2 sont donc complexes conjugués et peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} A_1 &= A' e^{j\varphi} \\ A_2 &= A' e^{-j\varphi} \end{aligned}$$

$y(t)$ s'écrit alors :

$$y(t) = A' e^{-\delta t} \left[e^{j(\omega_D t+\varphi)} + e^{-j(\omega_D t+\varphi)} \right]$$

soit finalement, en posant $A = 2A'$:

$$y(t) = A\ e^{-\delta t}\ \cos(\omega_D t + \varphi)$$

$y(t)$ peut être interprétée comme une fonction périodique de pulsation ω_D , de phase initiale φ et d'amplitude $Ae^{-\delta t}$ décroissant exponentiellement au cours du temps. On peut définir une pseudo-période

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

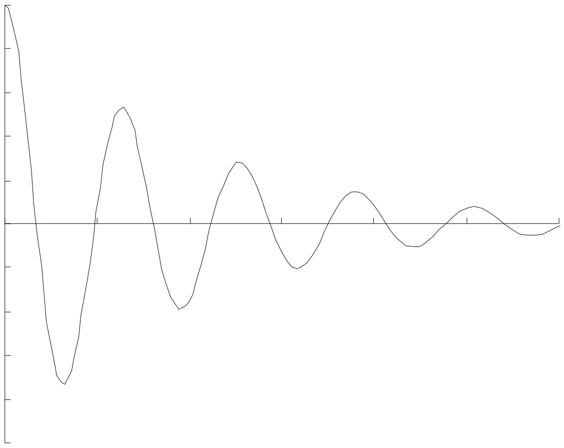
A et φ sont deux constantes d'intégration définies à partir des conditions initiales :

$$\begin{aligned} y_0 &= A\cos(\varphi) \\ \dot{y}_0 &= -A\cos(\varphi)\ [\delta + \omega_D\ \tan(\varphi)] \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\ \arctan\left[\frac{\omega_D\, y_0}{\dot{y}_0 + \delta y_0}\right] \\ A &= \frac{\sqrt{(\omega_D\, y_0)^2 + (\dot{y}_0 + \delta y_0)^2}}{\omega_D} \end{aligned}$$

La figure ci-dessous représente les variations de y(t) dans le cas particulier de conditions initiales :$y_0 \neq 0;\ \dot{y}_0 = 0$.



Régime pseudo-périodique

Remarque : Cas particulier où $\delta = 0$:
L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{y} + \omega_0^2\, y = 0$$

La solution s'exprime dans ce cas :

$$y(t) = A \ \cos(\omega_0 t + \phi)$$

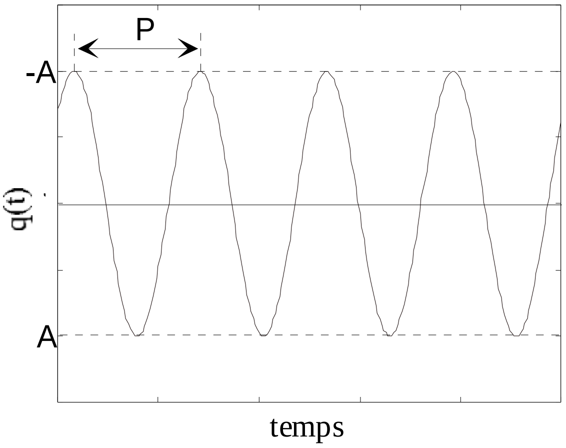
Cette solution est appelée solution harmonique car $y(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω_0 , de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ et dont l'amplitude A et la phase initiale ϕ sont déterminées par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} y_0 &= A \cos(\phi) \\ \dot{y}_0 &= -\omega_0\, A \sin(\phi) \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \phi &= -\arctan\left[\frac{\omega_0\, y_0}{\dot{y}_0}\right] \\ A &= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned}$$

La figure suivante représente les variations au cours du temps de y(t) dans le cas particulier où : $y_0 = 1$ *et* $\dot{y}_0 = 0$.



Oscillations non amorties

A.3 Equation avec second membre

A.3.1 Solution générale

Soit y(t) la solution générale de l'équation différentielle avec second membre :

$$\ddot{y} + 2\,\delta\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = A(t)$$

Soit $y_H(t)$ la solution de l'équation homogène et soit $y_P(t)$ une solution particulière de l'équation avec second membre ; $y_H(t)$ et $y_P(t)$ sont les solutions respectives des deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_H + 2\,\delta\,\dot{y}_H + \omega_0^2\,y_H &= 0 \\ \ddot{y}_P + 2\,\delta\,\dot{y}_P + \omega_0^2\,y_P &= A(t) \end{aligned}$$

Les opérations de dérivation qui interviennent étant des opérations linéaires, l'addition membre membre des deux équations différentielles précédentes donne :

$$(\ddot{y}_H + \ddot{y}_P) + 2\,\delta\,(\,\dot{y}_H +\,\dot{y}_P) + \omega_0^2\,(y_H + y_P)\; = A(t)$$

Ainsi la solution générale peut être obtenue en faisant la somme de la solution homogène et d'une solution particulière :

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

A.3.2 Cas particulier où A(t) est constante

Considérons le cas particulier important où $A(t) = A_0$, A_0 étant une constante réelle. L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{y} + 2\,\delta\,\dot{y} + \omega_0^2\, y = A_0$$

On peut vérifier que

$$y = \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

constitue une solution particulière de l'équation avec second membre. Selon le cas la solution générale de l'équation avec second membre sera :

- Régime fortement amorti $(\delta > \omega_0)$

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

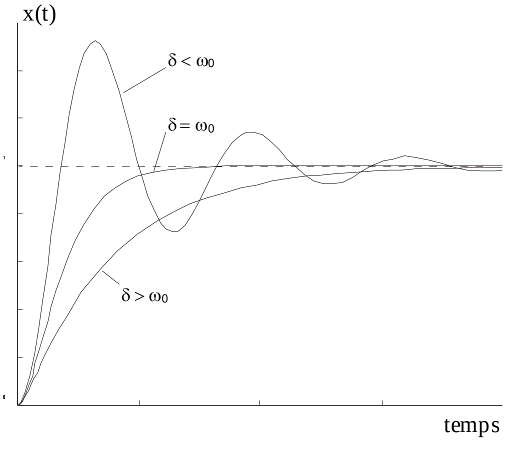
- Régime critique $(\delta = \omega_0)$

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\delta t} + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

- Régime pseudo-périodique $(\delta < \omega_0)$

$$y(t) = A\ e^{-\delta t}\ \cos(\omega_D t + \varphi) + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

Dans les trois cas considérés les constantes d'intégration A_1 , A_2, A et ϕ sont déterminées à partir des conditions initiales. Considérons à titre d'exemple le cas particulier $y_0 = 0$ et $\dot{y}_0 = 0$. La résolution des systèmes d'équations obtenus permet de calculer les constantes d'intégration et de tracer les variations de $y(t)$ pour les trois régimes. Les variations correspondantes de $y(t)$ sont représentées par la figure ci-dessous.



Cas où $A(t)$ est une constante

A.3.3 Cas particulier où $A(t) = A_0\cos(\Omega t)$:

Nous pouvons vérifier que $y_P(t) = Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$ constitue une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre à condition que l'amplitude Y_0 et la phase θ vérifient la relation :

$$\left[\omega_0^2 - \Omega^2\right] Y_0 \cos(\Omega t + \theta) - 2\,\delta\Omega \sin(\Omega t + \theta) = A_0 \cos(\Omega t)$$

Le développement des termes en cosinus et en sinus permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{A_0}{\sqrt{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \\ \theta &= -\arctan\left[\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right] \end{aligned}$$

La solution complète s'écrit alors suivant le cas :

- Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$)

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

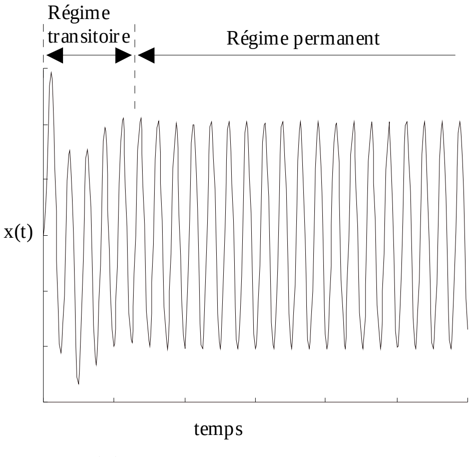
- Régime critique ($\delta = \omega_0$)

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\delta t} + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

- Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)

$$y(t) = A\ e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi) + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

Comme dans le cas précédent les constantes d'intégration A_1 , A_2 , A et θ sont déterminées à partir des conditions initiales. La figure suivante représente le résultat obtenu dans le cas particulier où :($y_0 = 0\,, \dot{y}_0 = 0$).



Cas où A(t) est une fonction sinusoïdale

On remarque que dans tous les cas la solution homogène tend zéro lorsque t augmente, et la solution générale s'identifie alors avec la solution particulière :

$$y(t) \simeq y_P(t)$$

Pour cette raison la solution de l'équation homogène est appelée solution transitoire tandis que la solution particulière est appelée solution permanente.

A.3.4 Cas où A(t) est une fonction périodique du temps

Introduction

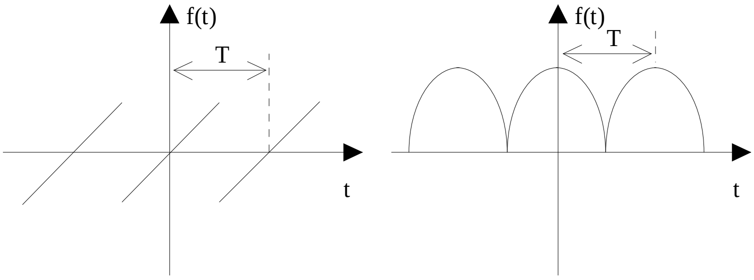
Nous avons étudié dans le paragraphe précédent la solution de l'équation différentielle dans le cas harmonique, c'est-à-dire lorsque le second membre est une fonction sinusoïdale de la variable t. En considérant le cas de fonctions périodiques, nous procèderons à une généralisation du cas harmonique.

Développement en série de Fourier d'une fonction périodique

Les fonctions périodiques Une fonction $f(t)$ est dite périodique, de période T, si pour tout t, $f(t+T) = f(t)$ où T est une constante positive. La plus petite valeur non nulle de T est appelé la période de $f(t)$.

Exemples :

1. La fonction $\sin(\pi t)$ reprend les mêmes valeurs pour $t = 2, 4, 6$ puisque $\sin[\pi(t+2)] = \sin[\pi(t+4)] = \sin[\pi(t+6)] = \sin(t)$. Cependant 2 est la période de $\sin(\pi t)$.
2. La période de $\sin(\Omega t)$ ou de $\cos(\Omega t)$ est $2\pi/\Omega$. La période de $\sin(n\Omega t)$ et de $\cos(n\Omega t)$ est $2\pi/n\Omega$.
3. Une constante a pour période n'importe quel nombre positif.
4. Les figures ci-dessous représentent deux exemples de fonctions périodiques non sinusoïdales.



Exemples de fonctions périodiques

Définition des séries de Fourier Soit $f(t)$ une fonction périodique de période T, c'est–dire telle que $f(t) = f(t+T)$, la série de Fourier ou le développement de Fourier qui correspond $f(t)$ est définie par :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

où $\Omega = 2\pi/T$, n est un entier positif, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier. Ces coefficients sont définis par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\Omega t)dt \\ b_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\Omega t)dt \end{aligned}$$

La valeur $a_0/2$ représente la valeur moyenne de $f(t)$ sur la période T. Le terme sinusoïdal de pulsation $\Omega_1 = \Omega$, la plus faible est appelé fondamental tandis que les termes de pulsation $\Omega_n = n\Omega$ plus élevée sont appelés les harmoniques.

Cas des fonctions paires et impaires

- Une fonction est dite paire si $f(-t) = f(t)$. Dans le cas de développement en série de Fourier d'une fonction paire,il n'y aura que les termes en cosinus et parfois une constante qui représente la valeur moyenne. Il est aisé de montrer que :

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

- Une fonction est dite impaire si $f(-t) = -f(t)$. Seuls les termes en sinus peuvent très présents dans un développement en série de Fourier d'une fonction impaire. Il est également aisé de montrer que :

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Solution de l'équation différentielle La fonction $A(t)$ étant périodique, de période T, son développement de Fourier s'écrit :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{y} + 2\,\delta\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

La réponse permanente (ou stationnaire) qui s'identifie avec la solution particulière, pour t suffisamment élevé, peut alors être calculée pour chacune des composantes de l'excitation : $a_0/2$, $a_n \cos(n\Omega t)$, $b_n \sin(n\Omega t)$. On obtient alors par superposition :

$$y(t) = \frac{a_0}{2\Omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) + b_n \sin(\Omega_n t + \theta_n)}{\sqrt{(\Omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2 \Omega_n^2}}$$